A Theory of Quantum Reference Frame and its Implications to Gravity
一个量子参考系的理论及其蕴含的引力理论

罗敏杰

江苏大学物理与电子工程学院，物理系

Contents

I. 将量子理论表述和应用到一般时空坐标系中的早期尝试和困难

当前形式的量子理论的表述和解释建立在惯性系的概念基础上，当前形式的量子态演化的 Schrödinger 方程只在使用牛顿时间的惯性系中才成立的。一般（广义）相对论被发明出来的一个重要动机就是要剥夺惯性系概念在物理学中的特殊地位，将物理理论（当然也应当包括量子理论）建立在对一般坐标系都成立的概念基础上。

虽然一开始量子理论就被尝试表述在对任何 Lorentz 惯性系都成立的形式上，但是早期的尝试并不成功，使得 Schrödinger 回到了牛顿的惯性系中来写他的波动方程，反而取得了成功。后来才知道要将波动方程表述在对一般 Lorentz 参考系都正确，需要正确的处理粒子的自旋的问题。于是 Klein-Gordon 方程在描述氢原子上的失败，以及 Dirac 方程的成功就变得部分的可以理解了。但这些早期将量子理论描述建立在一般 Lorentz 惯性系上的尝试，并没有如此简单。后来人们就意识到这些相对论性的波动方程，虽然在任何 Lorentz 系中都是成立的，但是却会遇到负概率或者负能量的问题，这是 Lorentz 时空度规允许负定必然带来的问题。但是很快就证明，只需要对理论的数学结果做适当的重新解释，这就不再是理论的困难，而是理论的正确预言，即预言反粒子的存在。这种重新解释要求我们对物理学的基本描述需要建立在“场论”而非“力学”的基础上，前者以时空中连续的“场”作为基本的动力学变量，而后者以坐标和动量等“力学量”作为基本的动力学变量。Klein-Gordon 方程描写的不是量子态，而是一种自旋为 0 的标量场的经典场方程。Dirac 方程描写的也不是量子态，而是自旋为 1/2 的旋量场的经典场方程。这些经典场方程，它们需要被再次量子化的处理。相对论性时空的负定度规产生的量子负模态很大程度不是被消除了，而是被重新解释了，负模态在相对论量子场论中是必然的结果，而且还很可能对一些重要的物理效应起到关键的作用。但是将量子理论表述到更一般的坐标中去的努力还没有停止，Lorentz 坐标系只是一类惯性系，将量子场论应用到一般固定弯曲时空背景上去导致了弯曲时空中的量子场论。这样的理论取得了一定的成功，被成功的应用在了比如研究宇宙极早期暴涨和原初涨落，黑洞物理等半经典的考虑弯曲时空情况下。但很快发现这样的理论也有一些基础性的困难，比如人们很快发现这样的理论是非幺正的，粒子数不再守恒，不同基态之间并没有幺正等价性，换言之，做一个坐标变换变到加速系，信息和幺正性都会丢失。目前看来，这是弯曲时空背景上的量子场论必然导致的后果。先不谈我们能否将量子理论应用到更一般的动力学的时空背景中去的所谓最终的量子引力理论，在固定弯曲时空上表述的量子理论似乎就已经体现出了与广义相对性原理相互冲突的地方，即如果这种一般坐标变换下的非幺正性如果是真实的，那么我们将有可能通过量子物理的实验来区分惯性系和加速系，这似乎违反了一般（广义）坐标相对性原理。

不仅量子理论要表述在一般时空坐标系上有困难，如果要将量子原理应用到一般动力学的 (赝) 黎曼坐标系，遇到了更大的概念和技术上的困难。在早期的正则量子化一般时空的尝试中，人们发现对广义相对论这种与坐标系时间选择无关的理论来说，时空或者引力的哈密顿量总是等于 0，换言之，根本就不存在一个引力或时空的 Schrödinger 演化方程，这称为时间问题（problem of time）。取而代之的是一个根本没有时间演化的 Wheeler-DeWitt 约束，这是一般协变理论量子化中普遍存在的概念问题。产生这个问题的原因很简单，因为广义相对论本身是时空坐标无关的，它根本没有量子力学需要的一个被外部测量的绝对时间。技术上，由于 Wheeler-DeWitt 约束作为基本动力学变量的的非多项式形式，也给求解这个约束造成了很大的技术困难。就算有办法求出解，比如通过 Ashtekar 变量重新表述后的哈密顿约束，这种“冻结”的正则量子态波函数被发现与一些扭结拓扑不变量有联系，但其物理含义仍然是不甚清楚的。

除了正则量子化的办法，在协变量子化的早期尝试中，人们也发现经典广义相对论是不可重整的。时空的量子修正无法被吸收到原有的 Einstein-Hilbert 作用量的系数中，如果你要将这些发散的量子修正采用通常的重整化方法来消除，那么就需要在原有作用量中不断引入新的项和新的系数。而如果你继续计算新的项和新的系数的量子修正，你还要不断的引入更多的新的项和系数来消除之前计算的发散，这个过程看起来将永无止境的进行下去，使得人们意识到如果要获得一个可重整的量子时空和引力理论你需要无限多的输入参数和无限多个抵消项，人们不知道这个理论是否存在一个裸的紫外不动点，使得理论在量子层面所有能标下在数学上都是良

好定义的，而不会出现数学奇异性，称为紫外完备性。不可重整性可能也是最臭名昭著的一个困难，但其实从紫外完备性的意义上严格说来，量子理论和大多数场论都无法兼容，包括量子电动力学也有所谓"朗道极点"问题，终结了通常的微扰论重整化计算，只有渐近自由的量子色动力学才在紫外能严格的良好定义（但也只能在紫外定义，其红外的行为目前仍然难以理解）。

在路径积分量子化中，出于通常量子场论路径积分量子化同样的考虑，即实作用量比虚作用量更好的积分可控性和收敛性，通常在欧氏符号的时间而不是赝黎曼符号中做路径积分，但遗憾的是，这样的对引力动力学变量即度规的积分测度在数学上就不是良好定义的，而且人们发现这样欧氏符号下的 Einstein-Hilbert 作用量是无下界 (unbouded from below) 的，使得这样定义的路径积分不可能收敛。这个发散性独立于前面提到的紫外发散问题，也是量子化方法应用于引力系统的基本困难之一。

值得指出的是，广义相对论这个与坐标系无关的 (赝) 黎曼几何描写了真实的时空本身（即时空的几何化）还依赖另一条额外的基本假设：等效原理。经典等效原理保证了处理物质粒子和物质参考系之间的对称性，使得物质粒子和物质参考系之间相对运动满足相对性原理。等效原理是时空和引力可以被普适的几何化的基础（引力不简单仅是一种通常的"力"），因此目前主流的几何化的量子引力候选者们也建立在假设等效原理在量子层面的有效性的基础上，但在标准 Schrödinger 方程的处理中，粒子自由下落过程的粒子质量依赖性是和等效原理所声称的自由下落的质量无关性严重冲突的，并没有物质粒子和物质参考系之间的对称性。这可以被如下简单的论证概括：即粒子在下落过程中，动能和重力势能分别和惯性质量引力质量成正比的，由于惯性质量等于引力质量的事实，这带来了经典意义上自由下落速度和加速度的质量无关性；但在 Schrödinger 方程所讨论的量子层面，测不准原理是粒子的位置和（质量依赖的）动量之间的测不准，粒子波函数量子不确定性直接和粒子的能量联系的，因此波函数的演化振幅和量子涨落展宽等一般都是粒子质量依赖的，比如坐标展宽 $\langle\delta x^2\rangle \propto \hbar/m$，质量大的粒子的展宽和质量小的粒子的展宽是不同的。在这种意义上，虽然质量不同的物质参考系有质量无关的测地线对时空的经典度量，但质量不同的物质参考系的涨落无法度量普适的时空涨落。更确切的说，等效原理和量子力学不确定原理的矛盾主要出现在二阶矩（比如坐标或动量的量子不确定性 $\langle\delta x^2\rangle$ 或 $\langle\delta p^2\rangle$），而量子力学的半经典近似，即 Ehrenfest 定理，给出的一阶矩（平均值 $\langle x\rangle$ 或 $\langle p\rangle$）是和经典牛顿力学和经典等效原理是一致的（一个广泛使用的例子就是物质粒子，比如光子，由于重力势能的变化带来的重力频移 $\langle\Delta\nu\rangle$ 和引力时间膨胀 $\langle\Delta t\rangle$ 效应是等效和一致的）。究其原因，Schrödinger 方程将波的自由下落看作是在一个固定的"时空容器"上由 (质量依赖的) 哈密顿能量驱动的动力学演化，而在广义相对论和等效原理中，波的自由下落则被等价的看作是波不运动，而装载着波的普适的"时空容器"在普适的变动。量子理论和广义相对论看待波和时空参考系之间的相对自由下落的这两种观点是不对称的或不等价的：首先，因为在量子理论图像中，波有二阶矩量子不确定性，而经典"时空容器"却没有与之对称的二阶矩量子不确定性；其次，就算在标准量子理论的意义上考虑了物质参考系的二阶矩量子涨落，其二阶矩量子涨落也是质量依赖的哈密顿能量控制的，因此不同质量的物质参考系统看似应该有不同的二阶矩量子不确定性，并不能度量到一个和物质参考系质量无关的普适的时空的二阶矩涨落。这些原因造成了量子测不准原理和等效原理之间的基本矛盾。在我们看来，如果等效原理在量子层面是违反的，即不同质量的尺子或时钟作为物质参考系统（由于没有普适的二阶矩不确定性）不再能度量到一个普适的（涨落的）时空了，这对于建立在时空测量之上的物理学来说是一个灾难。我们要么从头开始去建立一个和参考系质量依赖的非普适的时空理论（这时引力重新回归成为相对论之前的一种普通的"力"），要么重新考虑一种更一般的量子理论所处理的物质参考系统来对时空做出普适的度量（这时引力仍然还是时空普适的度量性质，而不简单只是一种"力"）。我们在本文中选择了后者，物质参考系统在一个更一般更基本的量子理论中处理的质量无关性不是来自非零哈密顿能量的 Schrödinger 动力学方程，因为本质上任何含有非零哈密顿能量驱动演化的量子系统都暗含了一个优先的惯性坐标系，这是我们从一开始就要抛弃的概念，而是来自一般坐标下（此时为零哈密顿约束系统）时空粗粒化的 Ricci 流效应。一个量子版本的等效原理作为量子引力和量子时空能几何化的基础，我们将在 (II和 V A) 中讨论。一个哈密顿约束的一般坐标系协变的量子系统将是更对称的处理物质粒

子/波和物质参考系统的统一概念框架，量子等效原理要求的物质参考系统的二阶矩量子涨落的质量无关性，通常物质粒子/波和物质参考系统的对称性和等价性将在这个框架中实现。

综上所述，量子理论不仅排斥等效原理和引力几何化，而且量子理论在表述到一般时空坐标系的问题上，在数学无奇异性的应用到处理时空引力量子自由度的涨落的问题上，都和广义相对论有诸多冲突和困难。要找到一个理论同时满足（a）量子力学原理、（b）一般（广义）坐标相对性原理和（c）等效原理，至少其一需要做适当的修正或者扩展的。我们目前的物理理论如何建立在一个统一的概念基础之上，是摆在当代物理学家们面前，至少要花一些时间去思考的问题。

假如等效原理的有效性可以推广到量子层面，那么我们依然可以将量子引力现象建立在几何基础之上。我们看到几何学从整体 Descartes 坐标系的解析几何方法，到 Gauss 认识到从二维曲面上的局部坐标系去度量就足以给出二维曲面的曲率，而不需要将二维曲面嵌入到三维空间中去，到 Riemann 一般性的发展了通过几何的局部二次型距离来推广高斯关于内部度量几何的想法。从高斯开始，到 Riemann 开创了与坐标系无关的内蕴几何的方法，这种坐标无关的精神或者纲领在 Einstein 的经典广义相对论中达到了物理上的高峰，对经典物理学带来历史性的综合。但这种内蕴几何的精神，并没有能贯彻到量子理论中，相对于内蕴几何和广义相对论的精神来说，目前量子理论的框架仍然需要并且依赖于外部绝对惯性坐标系的描写，它仍然是一个需要借助嵌入到外部坐标系来描写的“外蕴”的理论。从这点来看当前的量子理论还是一个建立在笛卡尔坐标系基础上的“牛顿力学”。这也是量子理论框架和广义相对性原理框架存在冲突的重要原因。二者需要建立在一个统一的概念基础之上。也正是由于传统的量子理论需要将世界如此的划分成了一个被观察的量子系统和一个外部绝对的经典仪器或经典“观察者”两部分，使得人们对这个理论进行解释的时候，需要引入一些目前仍存在诸多争议的假设才能自圆其说，比如根据标准的哥本哈根的解释，一个空间尺度很大的广延的量子波函数，在空间远距离的两个坐标点上，不得不“超光速”的瞬间整体塌缩（即所谓的 EPR 佯谬）等等。Einstein 以这样的佯谬来表达他所感受到的量子理论和相对论之间的内在不相容。目前的技术手段已经使得人们可以做这种几公里甚至上百公里的长距离的量子力学实验了（比如纠缠光子在远距离的分发和测量实验），纠缠光子对的关联测量结果虽然非常符合量子力学的预测，但这不是量子力学数学形式的预测的问题，而是对数学形式的物理解释的问题，是空间一端的观察者如何局部的制备实验仪器来测量这个局部的量子态，相对于空间另一端的量子态的“相对关系”（而不是两个各自量子态本身）应该如何恰当的解释的问题。目前人们尚没有更好的对当前量子力学的数学形式的解释，来给出一个自洽统一的方式来理解这些内在的矛盾，哥本哈根解释仍然是当前量子理论数学形式的最接近“实验室常识”和最方便的解释，使得这个解释被实验室尺度的物理学家们广泛接受了，虽然我们知道一旦一些解释（通过思想实验）被推向一些极端情况就可能导致一些内在问题。量子理论无论当前的数学形式还是其哥本哈根解释当然还有很大的改进空间，特别是需要发展成一个描写量子态之间“相互关系”的理论，比如被测量量子态和测量仪器的量子态之间相互关系的理论（这正是本文关于量子参考系的基本想法），而不再是描写单个量子态相对外部绝对经典仪器的理论，这种解释在理解引力的量子特性方面显得特别的迫切，因为这已经是没有绝对外部空间的坐标无关的相对性理论了。我们也将看到纠缠态的描述是一种将量子力学解释“内蕴化”或者“相对关系化”的一种合适的基础，从而避免标准哥本哈根的所谓“外部”解释带来的很多令人困惑的问题。

科学界作为一个坚固而保守的体系，通常不会很轻易的愿意去发明或接受一个新的图像和框架，除非旧的框架遇到了严重的和根本无法调解的危机，因此我们也要问，过去的量子理论和引力理论是不是真的遇到了严重的危机呢？的确，在实验和观测方面来看，量子理论在实验室尺度和广义相对论在天体尺度都在各自的领域里非常精确的对实验和观测做出预测，除了宇观尺度的“暗能量”，以及星系星系团和大尺度的“暗物质”问题。如果说暗物质问题尚可以通过在标准模型中引入额外的物质假设来解决的话（虽然这一假说随着半个多世纪的时间推移也在逐渐的面临另一种危机：到目前我们仍然没有探测到任何形式的暗物质），目前我们对一个性质上非常接近宇宙常数的暗能量，却触碰到了如何将量子涨落自洽的考虑到引力理论中去的基本困难，真空量子涨落本质上会导致引力系统的不稳定，即宇宙常数的精细调节问题，并不是在目前标准理论中简单引入新的常数或

新的能量形式就足够的，在我们看来，这是一种真正意义上当前观测和基本理论之间的危机，要求我们去弄清在量子理论和引力理论共存时究竟将会发生什么，并去修正我们对引力从星系到宇观大尺度的理解，这我们在后文中也将仔细的讨论。

我们也或多或少的面临 19 世纪末 20 世纪初相对论诞生前遇到处境，当时的困惑是，是否能通过电磁学或者光学实验来区分我们是否处于一个绝对运动的参考系中? 类似问题的当代版本是，我们是否能通过量子实验来区分我们是否处在一个惯性系或者加速系或者更一般的坐标系中? 及其一系列量子理论和一般相对性原理的矛盾所衍生的困难。我们看到 Einstein 为了保持相对性原理，即电磁学实验也无法让我们知道我们是否处于绝对运动之中，需要改动时间的概念，导致传统的欧几里德空间不再能够严格做到了。进而在广义相对论中，Einstein 继续指出，我们甚至无法通过经典物理实验来区分惯性系和加速系，经典物理学被表述成对一般（非惯性）坐标系中都成立，和坐标系的选择是无关的，这不仅没有产生根本性的矛盾，还导致了一个新的现象自动出现了，即一个正确的经典引力被自动的包含进入了这样一个以 (赝) 黎曼几何为基础的理论中，而不再需要一个额外的引力形式的假设了（如同牛顿引入平方反比定律所做的那样），这实现了经典物理学历史性的综合。引力现象本身和一般坐标相对性原理是紧密联系的。如果一般（广义）坐标的相对性原理的精神要继续保持，（这里的“一般”在本文中不仅指一般的经典弯曲坐标系，还试图将其推广到一般带有量子涨落的量子坐标系），即我们还是无法通过任何量子的实验来区分惯性系和加速系甚至一般（非惯性）坐标系，广义上的量子理论对惯性系和加速度甚至一般坐标系同样适用，那么目前的经典等效原理在一些量子层面上要做一定的扩充来保证，我们将看到这不仅也没有产生根本性的矛盾（比如前面提到的不同坐标系之间的幺正不等价性），而且一些新的现象也将自动出现，即一个满足一般量子原理的引力理论（由不同坐标系之间的非幺正性和量子反常导致，见 V C和 VI D），以及时空坐标系本身量子涨落产生的（非幺正的）热力学效应（见 VII B），被自动包含进入这样一个量子的时空几何中。

本文可以看作是在量子等效原理（量子引力几何化）的基础上，将 Gauss-Riemann-Einstein 的坐标无关或内蕴几何的纲领自洽的贯彻到量子层面的一种努力和尝试。将这个新的时空几何和引力理论应用到一些可能的领域，以达成对当前物理学一些困难的理解，是本文另外一方面的尝试：比如宇宙晚期的加速膨胀（见 VI C）、星系尺度的加速度反常（见 VI E）、极早期宇宙（见 VI H）、引力量子层面的稳定性（见 VI F和 VI G）、时空几何 Ricci 流的非平衡统计（见 V E）、平衡态下的黑洞的热力学和微观自由度的统计（见 VII D），加速系对谱线的影响（见 VII E）等，本文也努力尝试给出基于这个框架的一些理解和讨论。

II. 从经典到量子的等效原理

等效原理来源于 Einstein 想把他的只对惯性系成立的狭义相对性原理，推广到一般坐标系，比如加速系。在他的自由落体的思想实验中，他意识到加速度其实也是相对的，而且在一个对一般坐标系都成立的理论中，引力会自动被包含进来。他的灵感可以通过一个假想的比萨斜塔自由落体实验来说明。不同质量的铁球和木球，在忽略空气阻力之后，将以相同的加速度自由下落，甚至地球都应该以相同的加速度朝铁球/木球“下落”。进而被设想用来度量时空的光线，虽然光线的质量和铁球木球非常不同，但也将以相同的加速度自由下落。这种加速度和物质自身属性的无关性被推而广之，不再解释成是物质自身的（运动）属性，而其实描写的是时空自身的普适的属性。换言之，在引力中，度量时空的光线由于加速导致的弯曲不再是光线自身的弯曲，而是时空的弯曲。这种加速度和物质质量的无关性在非常精密的实验中被证实。等效原理这种将物质中普适部分的物理性质归结到时空几何的做法，其实是我们赖以度量时空和引力几何化的基础，否则我们将无法谈及如何度量“时空”这个被假想出来的所有物理事件发生的容器。并且也无法将时空的性质和引力联系在一起，因为物质在引力中的运动现在被看作是相对于时空这种抽象的中间等价物所作的运动，而不再是相对于物质的参考系统了。于是只要你描写了时空本身的弯曲，你就已经描写了引力本身。

但是在物质的量子效应被仔细的考虑进来之后，前面的经典的思想实验就需要被重新考虑了。比如我们考虑一个电子的自由下落，我们知道在量子电动力学中电子会发出一个虚光子进而又吸收掉这个虚光子，这样的量子过程产生了所谓的电子自能修正，当电子自由下落的时候，电子不仅自身在自由下落，其周围的虚光子或者电磁场一同自由下落，因此看起来量子涨落导致的电子自能也应该对电子的惯性有所贡献。著名的 Lamb 移动证实了这种由量子涨落导致的对电子惯性的贡献的存在。那么这种量子涨落导致的惯性质量是否如经典等效原理所说的那样也完全等效于引力质量，受到地球引力同样的吸引呢?

如果答案是肯定的，那么我们就遇到了另外一个问题，宇宙常数问题。因为如果量子涨落导致的惯性的确贡献引力，那么真空中的零点量子涨落贡献的引力质量将非常大，以至于宇宙都无法稳定。这就是一开始人们对宇宙学常数问题的困惑，怎么把这个真空贡献的零点量子涨落的贡献抵消掉? 后来随着宇宙加速膨胀的观测，人们开始认识到，我们还不能完全抵消掉所有零点涨落对引力质量的贡献，还需要剩下一点点，来恰好给出观测到的加速膨胀。这就是后来所谓的新宇宙常数问题：宇宙常数为什么会这么小? 宇宙学常数问题的解决也需要将经典的等效原理做适当的量子层面的推广。

我们后面讨论有效引力的时候再回到宇宙常数问题。我们看到要建立一般坐标系中都成立的量子理论，需要扩展我们的等效原理。一个自然的假定是，我们本质上无法区分哪部分能量或者惯性来自经典物理的贡献，哪部分来自量子涨落的贡献。我们同样需要量子的等效原理，将一个 (量子的) 自由下落的物质中普适的那部分 (量子的) 性质抽离出来归结为 (量子的) 时空的普适性质，用以作为一切 (量子的) 运动之间相互比较的一般的中间等价物：时空参考系。我们以此作为我们建立一个普适的量子时空和量子参考系的基本原理。在这样的原理下，带有不同量子涨落自能修正粒子都以相同的加速度自由下落，这些不同能量的粒子的波函数，由于有相同的下落速度，所以都以相同的方式多普勒频移。不仅如此，他们还都有相同的加速度，可以证明局部加速度和局部引力会导致了波频谱的高斯展宽（参见 V B 2），所以这些能量的粒子的波函数还会以相同的方式高斯展宽。并且这种普适的频移和展宽不再是这些粒子自身的性质，而已经被抽离出来，被重新解释成了时空的量子性质。其实这正是我们在宇宙加速膨胀观测中看到的。我们在后文中将看到大尺度的时空自身局部的 Ricci 流演化也会产生完全等效于局部加速产生的局部时空和谱线展宽（参见 VI C)，是产生大尺度宇宙加速膨胀的根本原因。宇宙中遥远的不同能量的谱线不仅以普适的方式红移（哈勃膨胀），还以普适的方式展宽（加速膨胀）。在距离-红移关系中，将距离用红移做泰勒展开，在展开到二阶项时，谱线红移的高斯（二阶）展宽带来一个普适的减速因子。不仅在大尺度宇宙学中，由于 Ricci 流对局部时空坐标的展宽产生了等效的加速膨胀的效应。

一个量子层面的等效原理是我们建立一个普适的通过量子的物质场（标架场）来度量时空的物理基础。如果那些物质的标架场具有某种普适的与具体物质无关的量子性质，比如我们后面将会看到的普适的二阶涨落展宽甚至更高阶的涨落，那么这些标架场的量子涨落也会被抽离出来被重新解释为时空几何自身的量子涨落，而不再被解释成作为标架的物质场的量子涨落了。不仅在经典层面，有加速系和引力在平均值（一阶矩）层面的经典等效原理，在时空坐标量子高斯展宽（二阶矩）层面，除了加速和引力这两个经典维度，时空 Ricci 流重整化和热效应的维度也将纳入到更一般的量子的等效原理，我们将看到 (1) 加速系的坐标的展宽，(2) 时空的弯曲和引力效应，(3) 局部时空的 Ricci 流的重整化产生的时空坐标展宽和时空几何弯曲，(4) 加速系或时空 Ricci 流导致的时空热效应，这四者在量子层面也是完全等效和不可区分的，而且都只有相对于观察者特定坐标系的意义，而没有绝对的意义。

目前观测上有如下一些证据来支持等效原理推广到量子层面的有效性：

首先，宇宙观测中的光谱线虽然能量可以相差很大，但在比较远的宇观距离，当光源本动相比宇宙膨胀共动变得比较小的时候，这些宇宙共动膨胀的不同能量的光谱线几乎都有相同的普适的红移（即不同能量的谱线随时空共动退行而背景普适"下落"），这可以看作是量子等效原理一定程度的检验。虽然现在我们还没有谱线普适展宽的直接测量，但我们其实看到了谱线的距离-红移关系在红移的平方阶的确测量到一个普适的减速因子 $q_0 \approx -0.64$，是在宇宙背景中几乎均匀各向同性的，这等价于谱线红移的一个普适二阶矩展宽，一定程度也是一

种等效原理的间接量子检验。

其次，类似比萨斜塔自由下落的一个思想实验，即考虑一个重球和一个轻球通过一根绳子连接起来，如果重球和轻球有不同的下落速度，那么他们之间就会相互拖拽的力。(这个推拽力会拖慢重球和拖快轻球的下落速度，但这与两个球加在一起由于质心的质量变得更大了，整体应该比单个球有更快的下落速度，产生了矛盾)。这个思想实验的量子版本可以相应的考虑成，一个由比较重的质子和比较轻的电子组成的氢原子复合粒子，跟随宇宙背景膨胀共动的加速退行，如果重的质子和轻的电子在宇宙膨胀背景中有不同的"下落"(共动退行) 速度，那么质子和电子之间除了有库伦力之外还会有一个额外的相互拖拽力的贡献，这将导致测量到共动退行的氢原子光谱相比静止实验室惯性系的光谱有微小的移动，或等价的测量到精细结构常数和实验室系测量值的偏离。因此测量宇宙背景的共动退行氢原子的光谱红移或精细结构常数可以用于间接的检验量子等效原理的有效性。首先，在误差范围内，目前对宇宙膨胀背景中精细结构常数的测量结果和实验室系测量结果的偏离是非常小的。这在一定程度上也可以看作是一种对等效原理的量子检验。

再次，目前利用物质波干涉仪对不同质量的铷 Rb 和钾 K 冷原子的 Eötvös 因子 (描写它们的下落加速度的差别) 测量得到几乎为 0 的结果 $O(10^{-7})$，说明在量子层面不同质量的原子依然在很高的精度上是普适自由下落的。以及对量子反粒子的自由下落实验也给出几乎和通常 (正) 粒子相同的自由下落。另外，目前在重力场中的中子干涉实验（Colella-Overhauser-Werner (COW) 实验）除了可以通过哈密顿能量中加入引力势能带来的量子相位移动来解释之外，中子干涉的相位移动也可以自洽的通过中子在不同引力势中普适的时间膨胀来解释，因此 COW 实验也被认为是一种间接对等效原理的量子检验。

我们知道，经典轨道由总哈密顿能量 $H = E_{动能} + V$ 的变分 (量子涨落) $\delta H = 0$ 给出，由于动能 $E_{动能}$ 和惯性质量 $m_{惯性}$ 成正比，引力势能 V 与引力质量 $m_{引力}$ 成正比，而且由于惯性质量和引力质量相等 $m_{惯性} = m_{引力} = m$，所以经典轨道 $\delta H = \delta E_{动能} + \delta V$ 和质量 m 成正比，因此经典运动方程 $\delta H = 0$ 就和质量 m 无关了，这给出了经典层面的测地轨道的质量无关性。但是在量子层面，在惯性系中量子涨落一般非零，$\delta H \neq 0$，所以就算惯性质量和引力质量相等，量子层面引力效应（比如自由下落）表面看起来一般就是质量依赖的。更具体的说，Schrödinger 方程虽然可以给出粒子位置在一阶平均值层面正确的半经典近似，即 Ehrenfest 定理给出平均值意义上的牛顿定律和经典等效原理，但量子等效原理所要求的粒子的二阶量子涨落展宽 (甚至更高阶的涨落) 和质量的无关性却是和标准量子测不准原理不一致的。标准量子力学给出坐标的不确定性或展宽和质量成反比，即 $\langle \delta x^2 \rangle \propto \hbar/m$，通常认为量子等效原理要求的质量无关性只在大量子数或者大质量下才成立，在量子层面不再是严格成立了。但在本文的框架中，量子等效原理要求的质量无关性必须是严格的，只有这样物质标架场的量子涨落才能解释为时空的普适量子涨落。

要实现量子层面的质量无关性或普适性，只有惯性质量和引力质量相等这个事实是不够了，需要比经典运动方程给出的 $\delta H = 0$ 更强的条件。我们在（V A）建议，这个条件其实就是任意坐标系中的总能量约束：哈密顿约束 $H = 0$。这其实对于一般坐标系都成立的量子理论是自然的，一个一般坐标不变的量子理论自然就是一个没有哈密顿量的约束系统，因为任何含有非零哈密顿能量驱动演化的量子系统都暗含了一个优先的 (至少是局部) 惯性坐标系，暗含了对整个完整 4-时空 M^4 的一种特定的和优先的时间 $\mathbb{R}$ 拆分，比如 $M^4 = \sum_i M_i^3 \times \mathbb{R}_i$ (i 表示不同的局部坐标片，$\sum_i$ 表示将所有局部坐标片粘起来)，或者暗含了一个外部更大的空间 $M^5 = M^4 \times s$ 和外部全局时间 s，是我们从一开始就要抛弃的概念，这是传统非协变的正则量子化的缺点。而且我们后面也将看到在量子涨落的时钟的意义上惯性系也是无法被严格做到的。本文中我们不再谈论 (一般坐标下) 系统的哈密顿量，取而代之更恰当的基本概念是一般坐标下的作用量，作用量方法或者路径/泛函积分方法（本文中我们术语上不区分路径积分和泛函积分）是本文处理一般坐标不变的量子系统的主要方法，因为这种方法不依赖于 M^4 的特定时间拆分的选择，也不依赖于是否存在正则量子力学（Schrödinger 方法）假设存在的 M^4 的外部更大的全局空间 $M^5 = M^4 \times s$。我们从（V B）将看到，在一般坐标下，正是一个哈密顿约束的标架场系统，通过标架场的泛函积分量子化给出的一般量子坐标变换是与标架场质量无关的。

本文中物质粒子/波和物质参考系统的量子二阶矩涨落/量子不确定性一般来自两部分，如果在特定惯性系下有非零的哈密顿能量，其给出的 Schrödinger 动力学的非普适的动力学部分（因此这部分展宽不能被解释成普适时空展宽的部分，如同星体各自的本动给出的各种不同红移不能解释成时空膨胀的宇宙红移）。动力学部分能被坐标变换消除，因此在一般坐标不变理论中由于哈密顿约束则没有这部分的贡献。但一般总是有非动力学的纯几何粗粒化 (Ricci 流) 的部分的贡献（见 IV）。几何部分展宽是坐标不变的，因此不像动力学部分那样可以被坐标变换消除，相反几何部分展宽会带来坐标变换反常（见 V C），只能通过反常抵消来消除（见 VI A）。几何展宽部分是普适的，能被抽离出来重新解释成时空普适展宽（如同星体本动很小的时候的宇宙学红移被解释成时空膨胀退行的红移）。在通常实验室中前者的展宽是主导的（比如这个展宽可以被解释成各种粒子的寿命等），但后者相比非常小，因而时空可以被认为是经典的，当后者的展宽变得重要的时候（比如在宇宙学尺度，谱线共动的普适二阶矩展宽带来的距离-红移关系在二阶的修正和宇宙加速膨胀的解释），时空的量子特性就不能不考虑了。

因此我们看到，要协调 Schrödinger 方程或量子不确定性原理层面自由落体的质量的依赖性和量子等效原理层面需要的质量无关性，我们需要认识到 Schrödinger 方程描写的粒子/波的下落，并不是严格的测地（geodesic）的自由下落（free-falling），这样处理的粒子同时带有自身相对惯性系的本动的非普适的展宽和与"时空容器"共动的普适的几何展宽两部分。严格的自由下落应该由一般坐标不变的哈密顿约束系统描写，其中只有普适展宽，没有自身本动的动力学展宽，比如像非线性 σ-模型，如等效原理给出的那样，其经典运动方程就是质量无关的测地线方程，其中引力不是通过在 Schrödinger 方程的哈密顿量中加入引力势来引入，而是通过几何度规的方式协变的引入。

在非零哈密顿量的系统中，受到哈密顿能量驱动的动力学演化给出的量子二阶矩涨落只是整个完整的量子二阶矩涨落的其中一部分，而且是这部分是坐标系依赖的和非普适的，一个量子层面的等效原理确保我们总能通过坐标变换将其（没有内部自由度的粒子）变到相对静止的"自由下落系"（比如上述的宇宙共动膨胀坐标系）把原来特定惯性系中的哈密顿量变成哈密顿约束（即总能通过坐标变换到与粒子相对静止的坐标系使得粒子的展宽是零）。在一般坐标系中都成立且更自然的是哈密顿约束。在哈密顿约束系统并没有哈密顿能量驱动的演化，零哈密顿能量既不驱动一阶平均值的变化，零哈密顿能量也不驱动二阶量子涨落展宽。"自由"(无引力之外的相互作用) 的物质粒子的一阶平均值的变化和二阶量子展宽变化都来自物质粒子和物质参考系之间相对运动时发生的普适相对变化，比如坐标系测度的普适变化和/或坐标系的量子重整化或粗粒化。更具体的说，量子等效原理要求在自由下落系中，物质参考系普适的量子涨落展宽不是来自惯性系下物质参考系的哈密顿能量的动力学展宽，而是来自一般坐标系下物质粒子和/或物质参考系的量子涨落截断尺度下的粗粒化展宽（零哈密顿约束系统的路径积分量子化得到的 Ricci 流），物质参考系的 Ricci 流粗粒化效应因为微分同胚反常也带来了参考系测度的变化 (见 V C)。

量子层面粒子传播（各阶矩）的质量无关性（或者说普适性）只是量子等效原理的一方面，另一方面是我们看到，除了总能把非零哈密顿量给出的非普适动力学展宽通过坐标变换变成零之外，那些粗粒化导致的展宽和反常（见 V C）也可以通过反常抵消项将其普适的减除（见 VI A），于是在时空的局部总能回到无展宽无引力无温度的相对静止惯性系的标准结果。以此为基础，类比经典等效原理的另外一些等价的表述也能得到，例如量子层面局部引力、加速度和标架的热效应之间的不可区分性（见 VII E）等等。我们能把粒子/波的测地运动或自由下落过程完全看作是一个普适的一般几何坐标变换的过程，甚至所有和引力有关的现象都可以看作是一般坐标变换的过程，(量子) 引力可以完全通过 (量子) 一般坐标变换 (产生的量子反常和抵消项) 普适的引入和消除（见 V C和 VI）。(量子) 等效原理导致了 (量子) 引力的 (量子) 几何化。

III. 量子参考系统

本质上来说我们从来也没有“真正”度量过时空本身，我们对时空的所有度量都是借助某种物质参考系统（比如光或其他物质场作为参考系统）的间接的度量。比如当年高斯所考虑大范围三角测量的一个当代版本，要在地球引力背景下测量三角形的内角和是否等于 180 度，需要在空间中某三角形顶点上设置 3 个量角观测点，去分别测量从某个观测点观察另外两个点的夹角。但由于等效原理，光不可避免的和其他不同质量的物体以相同的方式下落，光线会受到地球引力的影响而弯曲，使得在引力背景中欧式几何的内角和是 180 度的结论是不能严格被做到的。

一个量子的等效原理，是我们通过物质参考系统度量时空来建立量子参考系理论的物理基础，以此为基础我们就知道该如何用物质量尺和时钟去测量那些普适 (和物质参考系质量等性质无关的部分) 的被重新解释成是时空的几何性质，而不再仅仅只是量尺和时钟自身的性质了。这种反映时空性质的物质参考系中普适的部分，不仅可以是经典层面，和物质参考系质量无关的一阶矩平均值 (比如物质参考系的坐标)，也可以是量子层面物质参考系的二阶矩量子涨落 (比如物质参考系的坐标展宽)。将那些物质参考系中普适的性质归结到时空或许是人类先验或出于概念的简单性的本能，如同在人类早期只是“以物易物”的交易，但在不同物品之间相互比较价值时就非常不方便，而后发展出通用货币成为度量所有交易中被抽象出来的一般价值，扮演一般等价物的角色，使得交易被极大的简化了。时空参考系就类似的扮演了不同运动之间相互比较的一般等价物的角色。

我们先以时钟作为一个最简单的参考系统的例子 [1, 2]，去看一个参考系统是如何以一种不太明显的方式进入到描写物理运动中去的。

A. 经典时钟

牛顿运动定律的建立基于人们能够通过机械时钟去实现时间的物理测量。伽利略发现了单摆的等时性，可以作为机械时钟的工作原理。虽然当时并没有一个“标准时钟”去告诉伽利略为什么单摆是“等时”，当时伽利略只能借助他唯一可用的“标准”：脉搏。到了牛顿，他把时间的概念数学化了。类似复杂图形的参数化，牛顿假设存在一种像伽利略单摆这样的机械仪器为要研究的运动物体，自动“生成”一个参数：（牛顿）时间。自然界里那些看起来复杂的运动，如果通过时间参数的参数化之后，这些看起来复杂的运动被极大的简化。牛顿要建立他的运动定律，首先要做的事情就是通过他的第一定律去定义一个时钟，在这样定义的时钟下，牛顿第二定律的方程有最简单的形式。牛顿的运动定律所要去决定的是一个物体在三维空间中运动时的空间坐标 X, Y, Z 被牛顿时间 t 参数化下的形式 $X(t), Y(t), Z(t)$，称为物体的运动方程。

然而在 19 世纪人们从实验开始逐渐通晓电磁学之后，这个牛顿用单摆生成的参数的图像受到了挑战。因为电磁学的 Maxwell 方程并不满足伽利略的相对性原理，当 Maxwell 方程变换到一个匀速运动的坐标系中 Maxwell 方程的形式改变了，换言之你似乎可以通过电磁学的实验来判断观察者是否是在做一种绝对的运动，而这与运动只是相对的相对性原理是矛盾的。那么到底是 Maxwell 方程在运动的坐标系中不对了，还是伽利略的相对性原理不对？还是直到 Einstein 才看清楚这个问题的症结在于，要使得运动坐标系中的 Maxwell 方程和相对性原理同时都成立，牛顿的全局参数 t 作为时间的图像必须抛弃了。在 Einstein 看来，时间是一个观察者从时钟上读到的数值 T，而不再是牛顿的参数 t 了，而这个观察者读到的时钟的数值 T 在不同运动速度的坐标系上是不同的，如果光速在所有惯性系中速度都相同的话。于是要描写一个物体的运动除了需要三个空间坐标 $X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)$ 之外，还有一个 Einstein 的时钟 $T(\tau)$，如果假设一个全局的参数 τ 仍然存在的话。这个假设存在的全局参数 τ 仅仅只是一个参数，作为 $X(\tau), Y(\tau), Z(\tau), T(\tau)$ 的共同参数，不一定非要和时间有什么关系了，虽然由于历史原因我们常称之为“原时”(proper time)。Einstein 抛弃了那个无法观测到的牛顿全局参数 t 作为时间，而采用了在不同运动速度的坐标系中的物理时钟的读数 T 来作为比较（同一个惯性系中）不同运动

之间的中间等价物：时间，于是在不同运动速度的惯性系中物体的运动方程从原来的一组函数 $X(t), Y(t), Z(t)$，就变成了一组泛函 $X[T(\tau)], Y[T(\tau)], Z[T(\tau)]$。

B. 量子时钟

尽管 Einstein 重新解释了物理系统中更严格意义上的时间，但牛顿的全局参数 t 仍然活在目前的教科书量子理论中。在量子力学中，Heisenberg 最早放弃了原子中无法观测到的电子轨道的概念，而只采用了那些能观测到的量，比如原子光谱线。而在 Bohr 的早期解释中，由于每条光谱线是两个电子能态之间的跃迁产生的，所以在 Heisenberg 的图像中，电子的空间坐标不再是一个普通的数 (c-number)，而是电子在两个不同能态之间跃迁的方阵 (q-number)，换言之，电子的空间坐标从一个数变成一个矩阵。矩阵力学迈出了今天我们所认识的 (教科书) 量子力学的第一步。虽然在量子力学中微观粒子的空间坐标被重新解释了，但量子力学中的时间还是牛顿的全局参数。为了让量子理论满足 Lorentz 不变性，在一般的 Lorentz 惯性系都成立，量子场论也只是把牛顿的一个全局参数 t 换成了 4 个全局参数 x, y, z, t，并解释成 Minkowski 时空坐标。量子力学预设了一个手持牛顿参数 t 生成器的经典外部观察者，而量子场论的经典外部观察者生成 4 个全局参数。这种外部观察者的存在导致教科书量子理论的一些本质困难，比如它没法应用到整个宇宙，因为根据定义，宇宙没有外部。而且量子理论这种将世界划分为被观察的量子系统和一个外部的经典观察者/经典仪器的做法，使得教科书量子理论需要一些额外的假设去处理外部经典观察者和被观察的量子系统之间的测量的过程，比如哥本哈根解释中的波函数塌缩等。

Einstein 的相对论告诉我们，时间已经不再是牛顿的全局外部参数 t，而是每个惯性系中的时钟的读数 $T(\tau)$。而时钟是一个物理仪器，用来” 生成” 一个理想化的、标准的运动 $T(\tau)$，比如牛顿第一定律中匀速运动的物体，比如时钟的指针的匀速圆周运动。而我们知道量子理论告诉我们世界上所有的运动都没有理想化的，因为他们总是在量子涨落，换句话说，世界上可能根本不存在一个绝对理想化的不涨落的量子时钟。但一个被当作时钟的物体也总是在量子涨落这件事情可能没有那么重要，因为时钟只是作为中间等价物，或者中间参照物，来让其他的运动相互比较，使得复杂的运动能被得以简化。就像如果你用物品和物品来相互交换的时候，物品的价值就比较复杂不容易看出来，而当你用一个共同的中间等价物“钱”来交换物品的时候，物品的价值就一目了然了，仅此而已。“钱”的自身的价值涨跌并不重要，重要的只是不同物品，不同运动之间的关系。

要在数学上定义一个量子的时钟，作为不同运动之间的参照系统，其实需要问的第一个问题就是，如何量子化的处理 Einstein 的时钟 $T(\tau)$，让这个时钟即满足量子力学，在不断的量子涨落，又满足相对性原理。另外我们还要问的第二个问题是，原来经典层面的运动方程泛函 $X[T(\tau)], Y[T(\tau)], Z[T(\tau)]$ 在量子层面到底是什么意思?

为了简单起见，我们考虑一个一维运动的物体，空间坐标只有 $X(\tau)$，它随参数 τ 运动的哈密顿量是 H_X。另外现在我们也考虑一个时钟，其指针的坐标 $T(\tau)$ 随参数 τ 运动由哈密顿量 H_T 来给出。这里 X 和 T 共享的全局参数 τ 可以解释为一个全局的牛顿参数。另外我们假设这个物体 $X(\tau)$ 和时钟 $T(\tau)$ 之间没有相互作用，他们相互独立的随 τ 参数演化，所以整个系统的哈密顿量就是 $H = H_X + H_T$。整个系统的量子态空间就是物体坐标 $X(\tau)$ 所张成的量子态空间 $\mathscr{H}_X$ 和时钟指针坐标 $T(\tau)$ 张成的量子态空间 $\mathscr{H}_T$ 的直积空间 $\mathscr{H}_X \otimes \mathscr{H}_T$。而整个系统的量子态，作为整个哈密顿量的本征态，却并不一定简单的是物体的量子态 $|X(\tau)\rangle$ 和时钟量子态 $|T(\tau)\rangle$ 的直积态，一般来说是一个纠缠态，维数为较小的 Hilbert 子空间的维数

$$|X, T\rangle = \sum_{\tau} C_\tau |X(\tau)\rangle \otimes |T(\tau)\rangle \tag{1}$$

所有测量过程都是被测量系统状态和测量仪器状态之间的比较。当我们要对这个系统进行测量之前，首先要进行初始化，称为仪器校准（calibration）或者仪器刻度，即调整物体的坐标 X 和时钟 T 的状态，使得仪器

（时钟 T）和被测系统（物体位置 X）之间建立一对一的对应关系，从而可以从读取仪器状态中测量到相应的被测系统的状态。纠缠态 (1) 的叠加系数 C_τ 由校准的状态制备给出。比如调整到在 $\tau=0$ 的时候，时钟指针处于 $T(0)=0$ 的状态，而物体的坐标处于 $X(0)=X_0$ 的位置。这个过程其实相当于让他们经历了一个瞬间的相互作用，然后他们就不再相互作用了，而是相互独立的按照各自的哈密顿量开始随 τ 演化了。在随后的演化中，当时钟处在演化中的某个状态 $|T(\tau)\rangle$ 的同时，物体也一定处在某个演化中的状态 $|X(\tau)\rangle$，于是整个系统的状态就是 $|X(\tau)\rangle\otimes|T(\tau)\rangle$，其振幅是 C_τ 概率是 $|C_\tau|^2$。这个当时钟处于某个状态的同时物体位置处于相应状态的振幅或概率是在校准仪器的时候制备好的。并且量子原理还允许这些一对一状态的叠加态的存在，将所有可能的时钟和物体位置的一对一状态以振幅 C_τ 叠加，这就是纠缠态 (1)。从数学的角度来说，这个纠缠态建立了所有可能的时钟状态 $|T(\tau)\rangle$ 下物体位置的状态 $|X(\tau)\rangle$ 的一对一（概率的）映射 $|X,T\rangle:|T(\tau)\rangle\to|X(\tau)\rangle$。这种数学映射和泛函映射 $X[T(\tau)]:T(\tau)\to X(\tau)$ 本质无异。可以看作就是一种量子版本的运动方程泛函 $X[T(\tau)]$。

与运动方程泛函描写的确定性事件不同，这个纠缠态描写的是一种概率事件，当时钟处于状态 $|T(\tau)\rangle$ 的时候物体位置处在的状态 $|X(\tau)\rangle$，这个两个事件同时发生的归一化的联合概率是 $|C_\tau|^2$。和简单的直积态 $|T\rangle\otimes|X\rangle$ 也不同，纠缠态 $|X,T\rangle$ 是不可分离态，即联合概率 $|C_\tau|^2$ 并不等于单独测量时钟处于 $|T(\tau)\rangle$ 的归一化概率 $|A_\tau|^2$ 和单独测量物体位置单独处于 $|X(\tau)\rangle$ 的归一化概率 $|B_\tau|^2$ 的简单乘积，$|C_\tau|^2\neq|A_\tau|^2|B_\tau|^2$，其中 $|T\rangle=\sum_\tau A_\tau|T(\tau)\rangle$ 和 $|X\rangle=\sum_\tau B_\tau|X(\tau)\rangle$ 是各子系统单独所处的某种量子状态（称为子系统的条件状态或参考状态)，用纠缠态中各自的基矢量的展开。因此，在时钟确定处于状态 $|T\rangle$ 的条件下，物体位置处在状态 $|X(\tau)\rangle$ 的概率，是一种条件概率（conditional probability），或者相对概率（relational probability），由条件概率公式可得

$$\mathrm{P}\left(X(\tau)|T\right)=\frac{\mathrm{P}\left(X(\tau)\cap T(\tau)\right)}{\mathrm{P}\left(T(\tau)\right)}=\frac{\mathrm{P}\left(X(\tau)\cap T(\tau)\right)}{\mathrm{P}\left(T(\tau)|T\right)}=\frac{|C_\tau|^2}{|A_\tau|^2}. \tag{2}$$

$\mathrm{P}\left(T(\tau)\right)=\mathrm{P}\left(T(\tau)|T\right)=|A_\tau|^2$ 是参考状态 $|T\rangle$ 处在纠缠态子系统状态 $|T(\tau)\rangle$ 的概率，$\mathrm{P}\left(X(\tau)\cap T(\tau)\right)=|C_\tau|^2$ 是纠缠态同时处于 $|X(\tau)\rangle$ 和 $|T(\tau)\rangle$ 的联合概率。

我们称量子时钟或者测量仪器的量子态 $|T\rangle$ 为条件状态（conditional state）或者参考状态（reference state)，是观察者任意输入的，依赖于观察者想得到纠缠态 $|X,T\rangle$ 在什么条件下输出的相对概率，这就是纠缠态的“相对概率”解释。这是一种有别于标准量子力学的“绝对概率”的解释，在纠缠态绝对概率解释的基础上，额外考虑了仪器子空间所处状态的条件。在目前的框架中要从描写被测量子系统和量子仪器相对关系的纠缠态中提取出具有物理意义的测量结果，必须通过相对概率的解释。

我们看到纠缠态 $|X,T\rangle$ 不能表示成直积态 $|X,T\rangle\neq|X\rangle\otimes|T\rangle$，时钟处于状态 $|T\rangle$ 的条件下这个物体位置处在状态 $|X(\tau)\rangle$ 的相对概率并不等于单独测量物体位置时出现的概率，即 $\frac{|C_\tau|^2}{|A_\tau|^2}\neq|B_\tau|^2$。所以不可分离的纠缠态 $|X,T\rangle$ 只能以一种基于两个状态之间相对关系的方式进行概率的解释，物体位置的状态 $|X(\tau)\rangle$ 只是相对于时钟的状态 $|T(\tau)\rangle$ 时才有物理意义，而单独论及物体位置的状态，或者单独论及时钟的状态都没有绝对的意义，他们表现出来的量子概率的行为是完全不同的。

纠缠态 (1) 的不可分离性，或者说无法写成一个全局直积态，从数学的角度来说，就是纠缠态 $|X,T\rangle$ 无法用一个全局的时钟状态来覆盖所有可能出现的位置状态，只能在局部基底 $|X(\tau)\rangle$ 上局部的映射出一个时钟状态 $|T(\tau)\rangle$，然后将所有局部基底的状态都叠加 (粘) 起来，得到整体的量子态。换言之，纠缠态 $|X,T\rangle=\sum_\tau C_\tau|X(\tau)\rangle\otimes|T(\tau)\rangle$ 是在局部底空间 $|T(\tau)\rangle$ 上长出来纤维$|X(\tau)\rangle$ 的非平凡丛（non-trivial fiber bundle），而不是全局直积态 $|X\rangle\otimes|T\rangle$ 的平凡丛（trivial fiber bundle）。只有物体位置状态出现的概率 $\mathrm{P}\left(X(\tau)|T\right)$ 等于单独测量物体位置和时钟的概率时候，即可分离 $|C_\tau|^2=|A_\tau|^2|B_\tau|^2$ 的时候，我们可以用一个全局的时间来覆盖所有可能的位置状态。这时纠缠态 $|X,T\rangle$ 回到可分离的直积态 $|X\rangle\otimes|T\rangle$ 或平凡丛，进而可以将时钟的整个背景状态分离出来，变成标准教科书的量子态 $|X\rangle$，描写单独测量物体位置 X 处于全局时间 τ 时出现的概率 $|B_\tau|^2$。因此我们需要一种建立在局部纠缠态描写的“$|X(\tau)\rangle$ 和 $|T(\tau)\rangle$ 两个态之间相对关系”基础上的相对的量子力学解释，来推广教科书的“绝对量子态 $|X(\tau)\rangle$”的量子力学哥本哈根解释，这类似于将全局的笛卡尔几何学推广到建

立在局部底空间上的切丛基础上的弯曲的黎曼几何学。建立一种通过一个大的量子态空间中的一个子空间（量子测量仪器）去测量另一个与之纠缠的子空间（量子被测量系统）的相对性的量子理论和内蕴的解释，这在解释量子引力时显得尤为迫切。

纠缠态描写的非平凡丛和通常量子力学描写的全局平凡丛的一个重要区别是，由于非平凡丛没有全局的底空间，在底空间 T 上的局部基矢量不一定是正交的，是一种非正交基（nonorthogonal basis），而是给出底空间 T 上的度规 $\langle T(\tau)|T(\tau')\rangle = s^{\tau\tau'}$，即并不一定规范等价于 Kronecker's delta $\delta_{\tau\tau'}$

$$\langle T(\tau)|T(\tau')\rangle = \langle T(\tau)|T\rangle\langle T|T(\tau')\rangle = A^{\tau*}A^{\tau'} = \frac{A^{\tau*}}{A_{\tau'}} = A^{\tau}A^{\tau'*} = \frac{A^{\tau}}{A^{*}_{\tau'}} = s^{\tau\tau'} = (s)^{-1}_{\tau\tau'} \neq \delta_{\tau\tau'} \tag{3}$$

也就是说非平凡丛底空间完全可能是“弯曲”的，而不像通常量子力学的全局平凡丛基矢量是“平坦”的。正交归一性或不变内积现在要写成基矢量 $|T\rangle$ 和对偶基矢量 $\langle\bar{T}|$ 的形式

$$\langle\bar{T}(\tau)|T(\tau')\rangle = A^{*}_{\tau}A^{\tau'} = \langle T(\tau)|\bar{T}(\tau')\rangle = A_{\tau}A^{\tau'*} = \delta^{\tau'}_{\tau} \tag{4}$$

由于展开系数 A_τ 是归一化的，所以有 $\sum_\tau A^*_\tau A_\tau = \sum_\tau s_{\tau\tau} = 1$。

因此计算相对振幅的第二种方法是，相对振幅就是将非平凡纤维丛空间 $\mathscr{H}_X \otimes \mathscr{H}_T$ 上的矢量 $|X,T\rangle$ 用时钟的参考状态 $|T\rangle$ 做“条件投影”，其中参考状态 $|T\rangle$ 可以用纠缠态中时钟部分的基 $|T(\tau)\rangle$ 来展开得，

$$\begin{aligned}\langle T| &= \sum_{\tau} A^{*}_{\tau}\langle T(\tau)| = \sum_{\tau,\tau'} A^{*}_{\tau}s^{\tau\tau'}\langle\bar{T}(\tau')| = \sum_{\tau,\tau'} A^{*}_{\tau}\left(A^{\tau'}A^{\tau*}\right)\langle\bar{T}(\tau')| \\ &= \sum_{\tau,\tau'}\delta^{\tau'}_{\tau}A^{\tau*}\langle\bar{T}(\tau')| = \sum_{\tau}A^{\tau'*}\langle\bar{T}(\tau')| = \sum_{\tau'}\frac{1}{A_{\tau'}}\langle\bar{T}(\tau')|\end{aligned}$$

条件投影得到

$$\langle T|X,T\rangle = \sum_{\tau} C_{\tau}|X(\tau)\rangle\langle T|T(\tau)\rangle = \sum_{\tau,\tau'} C_{\tau}A^{*}_{\tau}\langle T(\tau')|T(\tau)\rangle|X(\tau)\rangle = \sum_{\tau,\tau'} C_{\tau}A^{*}_{\tau}s^{\tau\tau'}|X(\tau)\rangle = \sum_{\tau}\frac{C_{\tau}}{A_{\tau}}|X(\tau)\rangle \tag{5}$$

系数 $\frac{C_\tau}{A_\tau}$ 就描写了时钟处在状态 $|T\rangle$ 的条件下测量到物体位置处在 $|X(\tau)\rangle$ 状态的相对振幅（或条件振幅），体现出了纠缠态的子系统之间的相对相位，给出相对概率 $\frac{|C_\tau|^2}{|A_\tau|^2}$。现在 $\mathscr{H}_X \otimes \mathscr{H}_T$ 空间的态矢量的分量 C_τ(的长度) 不再（相对于绝对归一化系数 $\sum_\tau |C_\tau|^2$）有绝对意义，而只是相对于子空间 $\mathscr{H}_T$ 的分量 A_τ(的长度 $|A_\tau|^2$) 有相对的意义。更确切的说，我们在本文所谓描写相互纠缠的两个系统之间的“相对关系”，本质上就是要去描写纠缠态矢量在其中一个子空间上的分量相对于另一个子空间的“相对分量”，这种“相对分量”就是相对振幅或者条件振幅。

计算相对振幅或者相对概率的第三种方法是注意到，这个相对概率也相当于是将纠缠态的密度矩阵 $\rho_{X,T} \equiv |X,T\rangle\langle X,T|$ 用参考状态 $|T\rangle$ 求偏迹（partial trace）

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_T\left(\rho_{X,T}\right) = \langle T|X,T\rangle\langle X,T|T\rangle &= \sum_{\tau,\tau'}\frac{C_{\tau}}{A_{\tau}}\frac{C^{*}_{\tau'}}{A^{*}_{\tau'}}|X(\tau)\rangle\langle X(\tau')| = \sum_{\tau}\left|\frac{C_{\tau}}{A_{\tau}}\right|^{2}|X(\tau)\rangle\langle X(\tau)| \\ &= \sum_{\tau,\tau'}C_{\tau}C^{*}_{\tau'}s^{\tau\tau'}|X(\tau)\rangle\langle X(\tau')|\end{aligned}$$

这里对纠缠态中求偏迹并不是简单的将其密度矩阵在子空间中把对角元求和，这类似于在弯曲的黎曼空间中对矩阵的求迹不再是简单的将所有对角元加起来，而是需要用弯曲的度规（现在是 $s^{\tau\tau'}$）来收缩，即 $\mathrm{Tr}_T(\mathbf{O}) = O_{\mu\nu}s^{\mu\nu} \neq O_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}$。这是纠缠态为基础的量子力学和通常的（全局）量子力学的重要不同。

由于纠缠态振幅 C_τ 是仪器校准（作为初始条件）决定的，并不由理论的基本方程决定，纠缠态只是被测系统和量子仪器在校准的时候制备的“仪器读数和被测系统状态之间的对照表”。通过度规投影到条件态得到的相对

振幅 $\frac{C_\tau}{A_\tau}$（或相对概率）及其（相对于仪器子系统的）演化都完全由纠缠态子系统的度规 $s^{\tau\tau'}$，即公式 (3)，及其相对于纠缠态另一个子系统的演化来决定，是物理上可测量的。T 子空间的度规 $s^{\tau\tau'}$ 由 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程来给出，这个方程将嵌入在平坦的量子态空间 $\mathscr{H}_X \otimes \mathscr{H}_T$ 中非平坦的子空间 $\mathscr{H}_T$ 的度规 $s^{\tau\tau'}$ 的内蕴曲率（intrinsic curvature）和相对 X 子空间演化的外蕴曲率（extrinsic curvature）联系起来，是 T 子空间 $\mathscr{H}_T$ 的度规 $s^{\tau\tau'}$ 相对于 X 子空间的态矢量的运动方程。类似的我们也有 X 子空间 $\mathscr{H}_X$ 的度规的 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程描写其度规相对于 T 子空间态矢量的相对演化，被测系统和测量仪器现在有完全平等的地位。对 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程及其退化到 Schrödinger 方程的关系更多的讨论我们将放在附录中。于是我们看到现在相对振幅的演化并不是由纠缠态的演化产生的（纠缠态并不随外部参数变化），而是 Hilbert 子空间的子空间度规或者子空间的基矢量相对于另一个子空间的相对演化产生的。这点不同于标准量子力学，在标准量子力学中，初始制备的量子态相对于外部参数有幺正演化（幺正旋转），而这里是纠缠态矢量相对外部参数没有演化，而是 Hilbert 子空间之间在做相对的演化，使得纠缠态投影到子空间的分量（相对振幅）相对于另一个仪器子空间在做相对的演化。虽然采用 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程的形式对量子态的内蕴表述，可以将被测量系统（粒子坐标 X）和测量仪器（物理时钟 T）放在平等的地位来对称的对待，换言之，我们也可以将物理时钟当做被测系统而粒子坐标当做测量仪器。由于 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程是比较复杂的张量方程，要通过它们来求解出 X 子空间和 T 子空间之间的相对演化是数学上比较困难的。我们在后文中主要采用作用量路径积分的方法，单独求解 $X(\tau)$ 和 $T(\tau)$ 相对绝对外部参数 τ 的演化，然后再去得到 X 和 T 算符之间的相对演化，从而避免了处理相对复杂的 Einstein 方程等非线性的张量方程。

底空间的基矢量 $|T(\tau)\rangle$ 对 τ 的导数 $\langle T(\tau)|\frac{d}{d\tau}|T(\tau)\rangle$ 给出非平凡的联络，弯曲底空间上的非平凡联络导致态矢量在底空间平行移动的时候出现不可积贝里（Berry）相位，

$$\Delta\theta = \int_0^{\hat{\tau}} d\tau \langle T(\tau)|\frac{d}{d\tau}|T(\tau)\rangle = \oint_c d\mathbf{x}(\tau)\cdot\langle T[\mathbf{x}(\tau)]|\nabla_{\mathbf{x}}|T[\mathbf{x}(\tau)]\rangle = \oint_c d\mathbf{x}(\tau)\cdot\mathbf{A}[\mathbf{x}(\tau)]$$

而不再有全局的态矢量直积了，于是这两个子系统构成的状态是一个纠缠态，(为了方便看到和标准 Berry 相位的关系，我们可以定义 $\mathbf{x}(\tau)$ 是某种 τ 给出的高维参数空间，$\langle T[\mathbf{x}(\tau)]|\nabla_{\mathbf{x}}|T[\mathbf{x}(\tau)]\rangle \equiv \mathbf{A}[\mathbf{x}(\tau)]$ 是参数改变时态矢量的联络，从 $\mathbf{x}(0)$ 出发绕着参数空间上的闭合回路 c 转了一圈回到 $\mathbf{x}(\hat{\tau}) = \mathbf{x}(0)$，$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{A}[\mathbf{x}(\tau)]$ 是 $\mathscr{H}_T$ 子空间的 Berry 非零曲率)。因此我们看到，一般来说，纠缠态的子系统非平凡纤维丛的本性使得其子系统中一定存在非平凡的 Berry 相位。

一个被测量量子系统的量子态和一个量子仪器的量子态之间的纠缠态，及其它的相对概率解释，是本文给出一个一般时空坐标系下的量子理论的概念基础。纠缠态在量子理论框架中是良好定义的，但却有很多在经典物理中看似奇怪的性质。在过去人们以为波函数的尺度可能就原子大小，并不需要担心哥本哈根标准解释中，波函数瞬间塌缩带来的同时性的问题，但是 Einstein 的 EPR 思想实验却指出波函数的尺度其实可以很大，大到波函数在空间是完全宏观正交的，以至于波函数的瞬间塌缩会带来诡异的"超光速"的问题。我们在这里只是提供另外一种视角来看待纠缠态，以一种描述两个状态之间的"关系"的"关系态"的方式来看待它，使得这个纠缠态的图像不至于太无法理解。以自旋版本的 EPR 思想实验为例。一对带有自旋极化的光子或者电子在经历了一瞬间的相互作用之后，比如光通过非线性介质放出两个反向运动的极化光子 A 和 B，这两个光子或者电子之间就建立起纠缠态

$$|\mathrm{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\mathbf{n}\rangle_A \otimes |-\mathbf{n}\rangle_B \pm |-\mathbf{n}\rangle_A \otimes |\mathbf{n}\rangle_B\right)$$

其中 $\mathbf{n}$ 表示粒子在空间中的某个自旋方向，$-\mathbf{n}$ 是与其相反的方向。我们不用通常的 EPR 态的写法 $|\mathrm{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B \pm |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B\right)$ 是因为这样容易误导读者认为局部的状态是向 $\uparrow$ 或向 $\downarrow$ 的。实际上，当我们局部的去测量 A 粒子的自旋的时候，我们发现其实 A 粒子的自旋 $\mathbf{n}$ 完全是随机的。同样如果单独去测量 B 粒子的自旋也是完全随机的。虽然单独测量它们的自旋方向都是随机的，但它们的自旋方向总是相反的，这点可以

通过联合测量来证明。这说明其实 A 粒子或者 B 粒子单独的自旋量子态并没有绝对的意义，有物理意义的只是两个粒子自旋之间的关系，EPR 态只描写这个关系而不描写局部的粒子属性。就像如果没有参考系或者坐标系，你要去谈论一个物体绝对的位置没有任何意义，有物理意义的只是物体相对于参考系或者坐标系的位置。因此我们的理论要去描写的并不是单个局部粒子的自旋态，而是要去描写这这两个粒子自旋态之间的关系。从这个意义上说，其实我们并没有必要去担忧纠缠态塌缩是否是诡异的"超光速"的影响，因为"塌缩"的只是某种关系，而不是局部的量子属性。从标准的整体纠缠态所在的量子态空间来看，两个粒子的自旋状态之间的"相互关系"对一个外部观察者来说的确是瞬间塌缩的，正如同标准的哥本哈根的解释给出的那样，这并不违反相对论，因为其实并没有绝对的外部观察者在外部能看到这个两者的关系。纠缠态整体塌缩到某个直积分量时虽然二者之间的关系对一个"外部观察者"是确定的，但其实 A 和 B 各自具体的自旋属性（对外部观察者）仍然没有确定下来，即这个相互关系并不告诉 A 和 B 各地的观察者各自粒子绝对的自旋方向是什么，A 和 B 各自的自旋量子态还需要各地局部的观察者进行具体的测量给出。比如，当 A 测量到其自旋状态之后，A 将局部测量到的自旋状态通过最高只能是光速的信号来传递告诉观察者 B，观察者 B 在得知了观察者 A 的测量结果的条件下，得到在这个条件下 B 测量到的自旋状态指向某个方向的相对概率和期待值，否则 B 的局部观察者所谓的自旋方向只是相对于 B 的局部测量仪器的制备，是完全随机的。换句话说，*我们只能测量 A 和 B 之间的相对相位，而局部不管是 A 还是 B 的绝对相位完全是随机的*。因为如果你在局部用某一个仪器制备的自旋态比如 $|\mathbf{m}\rangle$ 来投影（比如通过特定方向制备的 Stern-Gerlach 的梯度磁场），局部的自旋态 $|\mathbf{n}\rangle$ 可以和这个制备的自旋态 $|\mathbf{m}\rangle$ 成任意的角度，有任意的内积和任意的相对相位。要测量 A 和 B 之间的相对相位（或者对应的相对振幅），需要将两个粒子重新以不超过光速传输回到空间同一点相遇进行干涉实验。这个干涉实验等价于我们通过其中一个子系统的态作为参考态对纠缠态进行投影，得到的就是之间的相对振幅或者相对相位。

在这个 EPR 实验中，我们可以认为，A 处的粒子扮演了测量仪器或者参考系的作用，另一个和它纠缠的 B 粒子扮演了被测量物理系统的角色。B 粒子有物理意义的自旋方向只是相对于 A 粒子这个测量仪器的自旋方向而言的，如果不知道测量仪器 A 粒子的状态，我们就无法谈及 B 粒子的绝对自旋状态，反之亦然。一个不太恰当的经典例子就是，如果两个相距很远的电极之间的电压差关系是确定的，比如 10V，这个电势差只有相对测量才能测量到，但你在局部其实量出来局部电极的电势是完全随机的，取决于局部观察者测量仪器选取的绝对和外部的电势零点，当你测量到你的电势，比如完全随机的 aV，并通过有限速度的信号告诉另一个观察者的时候，另一个观察者的电压的瞬间就变成了 (a + 10)V，因为这个电压只有相对的意义，但其实这个观察者的电势并没有物理的变化。我们的量子理论也需要完全建立在描写不同状态之间的关系的基础上，而非外部的绝对的状态基础上，建立在描写被测量子系统和量子仪器的量子态的关系的基础上，因为本质上测量仪器也是量子世界的一部分，它也可以处在量子叠加态上，而不像标准量子理论那样需要假定测量仪器只能处在经典状态给出经典测量结果。只有当测量仪器能近似当作经典仪器，忽略其量子效应的时候，才回到教科书量子理论那样描写单个要测量的量子系统的量子态。我们下面就以量子时钟为最简单的例子，来看如何将量子理论的动力学建立在描写量子态之间的关系的基础上。后文中中我们还要将这个简单例子推广到更一般的量子时空参考系，去建立更一般的时空坐标上的量子理论。

前面我们主要从量子态特别是纠缠态的角度来看被测量系统量子态相对于测量仪器量子态之间的演化，关于纠缠态子系统的量子态空间度规相对于另一个子系统演化所满足的 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程及其和 Schrödinger 方程的关系，以及通过子空间度规如何将纠缠态做子空间投影的更详细讨论，我们将放在附录中，这是一种基于量子态的表述。下面我们将从基于算符的相对演化的角度来处理这个问题，基于算符方法的好处是，算符作为 q-数，当它做平均场近似的时候可以看作普通的 c-数，比较容易回到过去标准的量子理论，比较便于和过去标准量子理论进行比较，并看出该理论是如何超越标准理论的。

正如前面所说，有物理意义的是物体的位置相对于时钟指针位置的相对的状态。由于作用量形式不涉及到时钟 T 作为算符，而可以看作通常的数，所以为了看清物体的位置 X 算符是如何随时钟指针的位置 T 算符而

变化的，我们考虑这个理论的作用量形式。假设物体和时钟的作用量为

$$S_X = \int d\tau \left[\frac{1}{2} m_X \left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 - V(X)\right], \quad S_T = \frac{1}{2} m_T \int d\tau \left[\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2\right] \tag{6}$$

其中全局参数 τ 可以解释为实验室的固有时间。物体的作用量就是在实验室时间上的动能 $\frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2$ 减势能 $V(X)$，而我们假设时钟的指针随实验室时间 τ 匀速运动，所以时钟的作用量只有动能。由于它们之间没有相互作用，那么整个系统的作用量就是两者的直和

$$S[X,T] = S_X + S_T = \int d\tau \left[\frac{1}{2} m_X \left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 - V(X) + \frac{1}{2} m_T \left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2\right]$$

我们观察到，由于总作用量 $S[X,T]$ 不含 T 的一次方项，所以系统的总平均能量

$$\frac{\delta S}{\delta T} = \langle E \rangle = 0 \tag{7}$$

于是整个系统的总哈密顿量 $H_X + H_T$ 等于 0，系统的量子态 $|X,T\rangle$ 随 T 演化满足的 Schrödinger 方程严格来说是一个 Wheeler-DeWitt 方程

$$(H_X + H_T)\,|X,T\rangle = i\frac{\delta}{\delta T}|X,T\rangle = 0 \tag{8}$$

物体的位置 X 是相对于实验室固有时间 τ 演化的，要将其相对于时钟 T 演化，只需要将作用量重写成

$$S[X,T] = \int dT \left\|\frac{d\tau}{dT}\right\| \left\{\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 \left[\frac{1}{2} m_X \left(\frac{\delta X}{\delta T}\right)^2 + \frac{1}{2} m_T\right] - V(X)\right\}$$

其中 $\left\|\frac{d\tau}{dT}\right\|$ 是时间的 lapse 函数，也就是时间积分测度的 Jacobian 矩阵，将原来对 τ 的积分变成现在对 T 的积分。要量子化这个理论相当于要去计算配分函数

$$Z = \int \mathscr{D}X\mathscr{D}T e^{iS[X,T]}$$

如果我们采用半经典近似，只考虑时钟的平均值 $\langle T \rangle$，忽略时钟的涨落方差 $\langle \delta T^2 \rangle$，那么对 T 的经典路径 $\langle T \rangle$ 的贡献主导了对 T 的路径积分，作用量中取其平均值，配分函数就变成

$$Z = \int \mathscr{D}X\mathscr{D}T e^{iS[X,T]} \overset{\text{半经典}}{\approx} \int \mathscr{D}X e^{iS[X(\langle T \rangle)]}$$

那么在相差一个常数的程度上，我们就得到和作用量 S_X 非常类似的作用量，仅仅只是将实验室固有时间参数 τ 换成了时钟时间 T，动能项中原来 X 对 τ 的导数变成了现在 X 对 T 的泛函导数。

$$S[X(\langle T \rangle)] = \int dT \left[\frac{1}{2} M_X \left(\frac{\delta X}{\delta T}\right)^2 - V(X) + \text{const}\right]$$

其中物体相对于时钟时间 T 中的有效质量变成

$$M_X = m_X \left\|\frac{d\tau}{d\langle T \rangle}\right\| \left(\frac{d\langle T \rangle}{d\tau}\right)^2 = m_X \frac{d\langle T \rangle}{d\tau}$$

仅当时钟走的和实验室固有时间一样快的时候，即 lapse 函数 $\frac{d\langle T \rangle}{d\tau} = 1$，$M_X$ 才等于 m_X。因此我们看到，其实质量并不是一般坐标变换下的不变量，仅仅只是惯性坐标系变换下的不变量。

当时钟的量子涨落可以忽略的时候（时钟的半经典近似），时钟指针的位置用一个数来表示，而不再是算符，那么相对于这个时钟的演化的 Schrödinger 方程将作为这个 Wheeler-DeWitt 方程的半经典近似而被导出。这时原来的总哈密顿量 $H_X + H_T$ 退化成

$$H[X(\langle T\rangle)] \overset{\text{半经典}}{\approx} \frac{1}{2}M_X\left(\frac{dX}{dT}\right)^2 + V(X) + \text{const}$$

原来 Wheeler-DeWitt 方程 Hamilton 量 H_X+H_T 就退化成了以 T 为参数时间的 Schrödinger 方程 Hamilton 量 $H[X(\langle T\rangle)]$，而原来的 Wheeler-DeWitt 方程的解，纠缠态 $|X,T\rangle = \sum_\tau C_\tau|X(\tau)\rangle\otimes|T(\tau)\rangle$ 就退化成 Schrödinger 方程的解，即标准教科书的量子态 $|X(\langle T\rangle)\rangle$。在半经典近似下，将量子时钟的坐标算符 T 近似为参数 $\langle T\rangle$ 的量子态 $|X(\langle T\rangle)\rangle$ 就等价于通过 (5) $\langle T|X,T\rangle$ 把纠缠态 $|X,T\rangle$ 用量子时钟的状态 $\langle\tau'|T\rangle = \sum_\tau A_\tau\delta_{\tau\tau'}$ 作为条件来投影，其中 $\delta_{\tau\tau'}$ 是半经典近似下无限精确没有宽度的量子时钟本征态 $\langle\tau'|T(\tau)\rangle = \delta_{\tau\tau'}$，得到 $|X(\langle T\rangle)\rangle = \sum_\tau \frac{C_\tau}{A_\tau}|X(\tau)\rangle$，因此当测量仪器处在参考状态 $|T\rangle$ 的条件下被测系统处在 $|X(\tau)\rangle$ 的相对振幅是 $\frac{C_\tau}{A_\tau}$。

而一旦时钟的量子涨落 $\langle\delta T^2\rangle$ 不能被忽略的时候，即时钟的本征态 $\langle\tau'|T(\tau)\rangle$ 不再能用 delta 函数来本经典的近似，而需要考虑其二阶矩宽度，比如是一个有限宽度的相干态了，这将导致诸多重要的后果，是这篇文章主要讨论的课题。首先，虽然系统的平均能量 $\langle E\rangle = 0$，但时钟的涨落 $\langle\delta T^2\rangle$ 将导致真空能量的涨落 $\langle\delta E^2\rangle \neq 0$，给出正确的真空能量对宇宙常数的贡献。其次 Schrödinger 方程就不再严格成立了，这将导致严格时间幺正性的破坏，导致时空的热效应，这点我们将在后文讨论时空一般坐标变换的反常中更一般的讨论。为了不局限于只考虑时钟的量子效应，而是考虑到更一般的对时空测量时的量子效应，我们需要将量子时钟的处理推广到更一般的量子时空参考系。

C. 量子时空参考系统和非线性 σ-模型

我们在 (II) 中看到，非零哈密顿量的试探粒子系统给出的非普适的（和粒子质量依赖的）量子涨落并不能度量时空本身的内禀涨落。但由于等效原理，系统哈密顿量控制的量子动力学展宽是可以被坐标变换消除的，因为一个没有内部自由度的粒子的哈密顿能量总能通过坐标变换变到和粒子相对静止系而变成零，即一个哈密顿约束。要找到一种和坐标无关的协变的物质参考系统来描写普适的时空的量子涨落（和物质参考系质量无关的），推广上一节的量子时钟的是一个非线性 σ-模型（NLSM）描写的物质参考系标架场理论。这个理论的哈密顿量自动就是零，即在一般坐标系中都成立的（不需要做坐标变换到相对静止系才能把哈密顿量变成零），其经典运动方程就是质量无关的测地线方程，引力作用是通过几何的方式引入的（自由下落和粒子质量无关），而不是通过在哈密顿量中加入引力势的方式引入（自由下落和粒子质量依赖）。以此为基础，量子等效原理确保了我们可以通过这个量子的物质参考系统来度量时空的量子属性。

简单起见，我们考虑一个在实验室系时空坐标 $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ 上的标量场 $\phi(x)$，作为上一节的一维运动的物体位置 $X(\tau)$ 的推广。作为上一节量子时钟 $T(\tau)$ 的推广，我们考虑要测量标量场发生的某一事件，至少需要 4 个时空坐标。比如通常的全球卫星定位系统 GPS，要定位一个人的地球上的某一个位置，由于空间中至少三个球面才能交于一点，我们至少需要测量和 3 颗卫星之间的距离；如果还要测量这个人处在那个位置的时间，那么还需要至少再测量和额外第 4 颗卫星之间的距离。因此如果要测量标量场在时空某点的事件在何时何地发生，至少需要 4 个标量场 $X_\mu = (X_0, X_1, X_2, X_3)$ 作为时空定位的 4 颗卫星。不失一般性的，我们可以假定标量场 $X_1(x), X_2(x), X_3(x)$ 用于测量事件的三个空间坐标，而标量场 $X_0(x)$ 用于测量事件发生的时间，后面称这 4 个无自旋的标量场为标架场，作为上一节的量子时钟的量子时空参考系的推广。4 个标量场 $X_\mu(x)$ 与要测量的事件标量场 $\phi(x)$ 共享同一组实验室全局参数，即实验室时空坐标 $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$，作为上一节实验室固有时间 τ 参数的推广。另外我们也同样的假设要研究的标量场事件 $\phi(x)$ 与 4 个标架场 $X_\mu(x)$ 之间没有相互作用，他们相互独立的在实验室系里随 x 分布和演化。因此整个系统的作用量就是他们的作用量之和 $S = S[\phi] + S[X]$。

整个系统的量子态空间就是要研究的 $\phi(x)$ 场所张成的量子态空间 $\mathscr{H}_\phi$ 和标架场张成的量子态空间 $\mathscr{H}_X$ 的直积空间 $\mathscr{H}_\phi \otimes \mathscr{H}_X$。而类似的整个系统的量子态，却并一定是简单的直积态，而一般来说是一个纠缠态

$$|\phi, X\rangle = \int d^4 x C(x) |\phi(x)\rangle \otimes |X(x)\rangle \tag{9}$$

其中我们将对 τ 的求和推广成 4 个实验室全局参数 x 的连续积分。而标架场的量子态是

$$|X(x)\rangle \equiv |X_0, X_1, X_2, X_3\rangle = \sum_{\mu\nu\rho\sigma\text{置换}} \alpha_{\mu\nu\rho\sigma} |X_\mu\rangle \otimes |X_\nu\rangle \otimes |X_\rho\rangle \otimes |X_\sigma\rangle \tag{10}$$

其中求和遍及所有指标的置换，以保证 4 个标架场是如同实验室时空 x 一样定向，并且保持比如宇称反演，时间反演，以及联合反演等不变。所以标架场的量子态本质上也是一个纠缠态，标架场纠缠态的制备过程就是要让它们尽可能无相互作用，相互独立的测量，已形成尽可能正交的标架。*值得指出的是，由于每个标架场粒子是带有标记的，所以不是全同的，这个标架场的量子态也可以看作是非全同独立粒子的多体量子态，在 (VIIB) 中我们会看到他们在热平衡时满足 Boltzmann 统计分布，而不是 Bose 统计分布。*

$|\phi, X\rangle$ 是纠缠态的原因也完全室类似的。因为在测量事件之前的仪器校准过程就是制备纠缠态的过程。比如还是以 GPS 卫星为例，我们首先要先通过地面上已知的某个位置来将 4 颗独立卫星的位置和卫星上的时钟进行精确的校准。整个校准过程相当于让地面的一个预设事件和 4 颗卫星的状态经历了一次相互作用，然后他们之间就不再相互作用而独立分布和演化了。这个校准过程建立了所有可能的事件 $|\phi\rangle$ 和所有可能的标架场/卫星构型状态 $|X\rangle$ 的一对一的映射 $|\phi, X\rangle : |X(x)\rangle \to |\phi(x)\rangle$。使得在未来的测量中，一旦测量到标架场处于量子态构型 $|X\rangle$ 我们就能推断出事件处于相应的量子态 $|\phi\rangle$，达到通过标架场仪器的读数对事件进行测量的目的。这个过程完全类似于上一节，在时钟和物体位置校准之后，只要读取时钟的状态就能推断出物体的位置状态。

完全类似的，根据标准的量子态的概率解释，测量得到当标架场处于量子态 $|X\rangle$ 的条件下事件处于 $|\phi(x)\rangle$ 的相对概率，也可以通过 $|\phi\rangle$ 和 $|X\rangle$ 联合发生的概率 $|C(x)|^2$ 以及标架场单独处于量子态 $|X(x)\rangle$ 的概率 $|A(x)|^2$，$|X\rangle = \int d^4 x A(x) |X(x)\rangle$，来计算 $\mathrm{P}\left(\phi(x)|X(x)\right) = \frac{|C(x)|^2}{|A(x)|^2}$，这就是相对概率。

纠缠态 (9) 中的时空部分 $|X\rangle$（只要不是 delta 的点分布）其实也扮演了一种将任何时空上物理量（比如这里的局部场算子 $\phi(x)$）生成的态 $|\phi\rangle$ 模糊化的模糊函数 (smearing function) 的作用。当你将这个物理量和时空的纠缠态的密度中的时空部分积掉（求偏迹 partial trace）是，就是一个将物理量在时空上糊化的过程，这改善了物理量（比如局部场算子的关联函数）的收敛性。这就是通过时空模糊化的 Ricci 流可以让局部算子的关联函数计算缓解了其非奇异的基本道理。

从数学的角度来说，$|\phi, X\rangle : |X(x)\rangle \to |\phi(x)\rangle$ 是一个纠缠态，也说明了这个映射只能在局部标架 $|X(x)\rangle$ 来下展开 $|\phi, X\rangle$，而无法通过一个全局的标架作为基底来覆盖所有可能出现的事件状态，即无法将 $|\phi, X\rangle$ 写成一个直积态。这说明，如果没有一个全局的外部时空来嵌入所有事件，用来写出整体的量子态，那么纠缠态这种局部映射就特别适合于局部的描写"弯曲"的标架构型上的事件，然后将所有可能的局部标架构型都叠加（粘）起来，得到整体的量子态，而让最终这个整体的量子态不再依赖于局部标架的选择。这完全类似于，如果没有平坦的外部 3 维空间来看一个弯曲的 2 维空间，那么一个生活在这个 2 维空间上的蚂蚁只能先一片一片的局部建立起局部平坦的坐标片来描写局部坐标系上的事件。然后再将所有局部平坦的坐标片通过一定的方式粘起来，粘成一个整体弯曲的 2 维空间，而使得粘成的整个弯曲 2 维空间不再依赖于具体局部坐标片上坐标的选择。这个 2 维空间存在自己内蕴的几何，而不需要借助一个被嵌入的外部 3 维空间外蕴几何来研究。目前量子理论不管是量子力学还是量子场论的表述其实都依赖于一个全局外部惯性系的存在，量子力学表述在伽利略惯性系之上，而量子场论表述在 Minkowski 时空的 Lorentz 惯性系之上。*如果我们把量子理论教科书中存在全局基矢的（绝对）量子理论看作是类似笛卡尔坐标的几何，那么可以把纠缠态为基础的这种没有全局基矢的（相对）量子理论看作是不依赖于任何外部坐标的内蕴几何流形，不依赖于全局基矢的存在与否。在本文中，我们依然假设纠缠*

态 (9) 的全局基矢 x 的存在，并将其解释成实验室 (惯性) 系，因为这样比较适合于传统量子论以惯性系为基础的量子化方法，但我们要记住，有物理意义的只是纠缠态 (9) 中被研究系统 $|\phi\rangle$ 和参考系 $|X\rangle$ 之间的相对关系。在量子理论中去除掉全局坐标系的概念，并且理论和局部坐标系的选择无关，可以被看作是本文的一个主要的目标之一。

现在我们来看在实验系时空中，标架场的作用量的形式如何推广上一节量子时钟的作用量 (6)。原则上如果量子等效原理成立，任何尽可能独立的 4 个标量场原则上都可以作为测量时空中发生某事件的"仪器"，只要你能恰当的抽离出那些标架场的普适的性质，那么这些普适的性质就不仅仅描写标架场自身的物理性质了，而是描写时空的性质了。我们可以设想在实验室系中，先以实验室墙和钟为一开始的参照，制备 4 个自由标量场，类似于 4 个量子时钟作用量。比如参照实验室墙 x_1 的方向发射标量场粒子束 X_1 等等，参数实验室时钟 x_0 设置标量场 X_0。这样 4 个标量场就制备成了和实验室时空相同定向，相同摆放的粒子尺子和时钟，这样标架场的经典解就比较容易的写出来了

$$X_\mu(x) = \sum_{a=0}^{3} e_\mu^a x_a$$

其中

$$e_\mu^a = \frac{\partial X_\mu}{\partial x_a}$$

称为 vierbein。按照前述 x_a 和 X_μ 对应的放置，并且规定标架场量和实验室坐标等距，这个 vierbein 就是一个 Kronecker's delta，$e_\mu^a = \delta_{\mu a}$。

一个具体的例子可以想象加速器对撞点周围放置用来测量粒子空间径迹的多丝正比室。多丝正比室是一系列整齐排列的非常细的金属丝，排列以正交的实验室墙为基本的参照，沿着某些方向放置。当一个粒子事件触发某一根细丝周围的气体导致放电时，这个放电的电信号沿着细丝的方向传送到探测器。这个放电做为电子脉冲信号，就如同使用的标架场，通过读取这些标架场的信号比如飞行时间等，来推断出事件发生的空间位置和发生的时间。

因为事件的 4 个时空坐标可以归结为通过测量和 4 个独立的探测器（比如独立的多丝室电子脉冲探测器或者独立的 GPS 卫星）之间的距离或者时间差来进行。所以我们将 4 个标架场的作用量写成在实验室系平坦背景时空参数上的 4 个自由的标量场之和

$$\begin{aligned} S_X &= \frac{1}{2}\lambda \sum_{\mu=0}^{3} \int d^4x \left[-\left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_3}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}\lambda \int d^4x \eta_{ab} \frac{\partial X_\mu}{\partial x_a}\frac{\partial X_\mu}{\partial x_b} \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\eta_{ab} = \text{diag}(-1,1,1,1)$ 是实验室系的平坦度规，我们采用 Einstein 求和规则将出现两次的指标求和而省略求和号。由于 4 个自由标量场 X_μ 也是相互独立无相互作用，相互纠缠的，所以 $\sum_{\mu=0}^{4}$ 只是把 4 个它们的作用量都加起来。

4 个标架场 X_μ 相互独立，相互正交只是在有限的实验室系，参照实验室墙和时钟在放置这些标架场时近似成立的。当外推到超出实验室系之外的时候，本质上就不再能借助实验室系的墙和时钟的参照来继续放置这些标架粒子束了。随着标架场在长距离上逐渐波包展宽，前面我们看到由于量子等效原理，标架场的这种展宽和粒子的加速或者感受到引力无法区分，这些粒子束看起来就普适的开始在这个等效的引力中感受到"自由下落"。在超出实验室系比较大的尺度的时候，这种在展宽或者"自由下落"就比较重要了，使得在超出实验室系的尺度之后，这些正交的标架场在引力背景中不再严格的正交。比如展宽有一个等效的沿着 x_3 方向的引力，虽然在实验室系中 X_1 粒子束运动一开始参照 x_1 来放置，与 x_3 是正交的，但随着粒子束飞行的距离逐渐变大，X_1 粒子束就在引力的方向 x_3 逐渐产生一个运动分量，由于 X_3 还是在 x_3 和引力的方向上，所以 X_1 的运动方向和 X_3 的

运动方向逐渐不再正交。或者等效的可以看作是，原来在实验室尺度 X_1 和 X_3 是没有波函数重叠的，由于 X_1 逐渐展宽，但是在大尺度下 X_1 和 X_3 的波函数逐渐重叠起来，不再正交。

但我们总可以在引力背景中通过“自由下落”实验局部的制备另外一套对偶的局部标架场

$$\bar{X}=\left(X^0,X^1,X^2,X^3\right)=\left(\frac{\delta}{\delta X_0},\frac{\delta}{\delta X_1},\frac{\delta}{\delta X_2},\frac{\delta}{\delta X_3}\right)$$

使得和原来的标架场 X 各分量分别正交。比如你跟着标架粒子 X_1 方向的运动，X_1 由于引力会逐渐弯曲，那么你就能局部的制备出另外几个标架场 (X^2,X^3) 使得他们分别和 X_1 的方向正交。从数学的角度看，如果我们将那些标架粒子的瞬时运动方向的各个分量看作是“切”标架场 $|X\rangle\in\mathscr{H}_X$ 的话，那么在跟着标架场自由下落的坐标系附近总能建立一个与之运动方向正交的局部“余切”标架场

$$|\bar{X}(x)\rangle\equiv|X^0,X^1,X^2,X^3\rangle=\sum_{\mu\nu\rho\sigma\text{置换}}\alpha_{\mu\nu\rho\sigma}|X^\mu\rangle\otimes|X^\nu\rangle\otimes|X^\rho\rangle\otimes|X^\sigma\rangle \tag{12}$$

其中我们将指标写在上面表示是对偶的余切标架场。

这两套相互对偶的标架场是完备的，足以表示所有可能的量子态。量子态 $|\Psi\rangle$ 在局部既可以通过“切”标架场 $|X\rangle$ 来展开 $|\phi,X\rangle=\int d^4xC(x)|\phi(x)\rangle\otimes|X(x)\rangle$ 也可以在局部通过“余切”标架场来展开 $|\phi,\bar{X}\rangle=\int d^4x\bar{C}(x)|\phi(x)\rangle\otimes|\bar{X}(x)\rangle$。如果切和余切标架场重合，这就意味着存在一个全局平坦的标架来展开 $|\Psi\rangle$，因为标架场成为和 x 无关的全局标架场，因此可以当作常数拿到纠缠态的积分号外面去。这时 $|\phi,X\rangle$ 就可以写成直积态而不再是纠缠态了。

借助对偶标架态，我们就能定义标架量子态的（经典意义上）“不变”内积了，现在需要用一个切标架态 $|X_\mu\rangle$ 和一个余切标架态 $|X^\nu\rangle$ 来内积。因为将右矢变成左矢的量子态的对偶操作其实和将切坐标变成余切坐标的坐标对偶操作在形式上是等效的，所以形式上我们如果将左右矢互变，同时也要把上下指标进行互变 (就不再写对偶的 bar 符号 $\bar{X}$ 了)，这样能保持量子态中标架指标的上下位置和经典张量指标上下位置习惯相同。这样切标架场态 $|X_\mu\rangle$ 和切标架场态 $|X_\nu\rangle$ 的内积就得到度规张量，写成

$$\langle X_\nu|X_\mu\rangle=\langle X_\mu|X_\nu\rangle=\left\langle\frac{\delta}{\delta X^\mu}X_\nu\right\rangle=\left\langle\frac{\partial X_\nu}{\partial x_a}\frac{\partial x_a}{\partial X^\mu}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial X_\mu}{\partial x_a}\frac{\partial X_\nu}{\partial x_a}\right\rangle=\langle e^a_\mu e^a_\nu\rangle=\langle g_{\mu\nu}\rangle \tag{13}$$

作为 (3) 的推广。而且现在这个纠缠态 (9) 在 X 部分的子空间的度规其实不是别的，已经就是时空的度规了，给出时空度规的平均值。如果将切场态 $|X_\mu\rangle$ 和余切场态 $|X^\nu\rangle\equiv|\bar{X}^\nu\rangle$ 内积就得到正交归一的 Kronecker's delta

$$\langle X^\nu|X_\mu\rangle=\left\langle\frac{\delta}{\delta X_\nu}X_\mu\right\rangle=\delta^\nu_\mu$$

作为 (4) 的推广。这样从余切标架场态 $|X^\nu\rangle$ 变换成切标架场态 $|X_\mu\rangle$，需要通过其各粒子束分量之间的夹角或者各波函数分量之间的交叠 $\langle X_\mu|X_\nu\rangle$ 来给出

$$|X_\mu\rangle=\langle X_\mu|X_\nu\rangle|X^\nu\rangle \tag{14}$$

这就是通过度规进行标架场指标下降 (提升) 的经典关系 $X_\mu=g_{\mu\nu}X^\nu$ 的量子标架场的形式推广，不同之处只是现在这个内积 $\langle X_\nu|X_\mu\rangle$ 的计算要考虑路径积分掉所有中间量子态 (64)。

接着，我们也可以得到在参数 x 空间上态矢量平行移动的 Levi-Civita 联络

$$\Gamma^\rho_{\lambda\mu}=\langle X^\rho|\frac{\partial}{\partial x^\lambda}|X_\mu\rangle$$

在这个联络下，准确到对 x 的二阶，任意一个态矢量 $|X_\mu\rangle$ 在参数 x 平行移动一圈 c 后回到起点，态矢量有一个和黎曼曲率

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho}=\partial_\mu\Gamma^\lambda_{\nu\rho}-\partial_\rho\Gamma^\lambda_{\nu\mu}+\Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}+\Gamma^\lambda_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\mu}$$

联系的变化

$$|\Delta X_\mu\rangle = \left(\frac{1}{2}R^\lambda_{\mu\nu\rho}\oint_c x^\rho dx^\nu\right)|X_\lambda\rangle$$

即 $\langle X_\lambda|\Delta X_\mu\rangle = \frac{1}{2}R_{\lambda\mu\nu\rho}\oint_c x^\rho dx^\nu$。由于 $R_{\mu\lambda\nu\rho} = -R_{\lambda\mu\nu\rho}$，有

$$\langle X_\mu|\Delta X_\lambda\rangle = \frac{1}{2}R_{\mu\lambda\nu\rho}\oint_c x^\rho dx^\nu = -\frac{1}{2}R_{\lambda\mu\nu\rho}\oint_c x^\rho dx^\nu = -\langle X_\lambda|\Delta X_\mu\rangle$$

因此

$$\Delta\langle g_{\mu\lambda}\rangle = \Delta\langle X_\mu|X_\lambda\rangle = \langle X_\mu|\Delta X_\lambda\rangle + \langle X_\lambda|\Delta X_\mu\rangle = 0$$

因此经典层面参数空间绕一圈回到原处的平行移动对态矢量的改变 $|\Delta X_\mu\rangle$ 并不影响该点的度规，即 (13) 仍然成立，换句话说经典的平行移动只改变态矢量的方向并不改变态矢量的长度或者内积。

借助切标架场和余切标架场构成的“不变”内积（双引号的“不变”只是经典坐标变换和平行移动的意义上不变，后面我们会看到在量子涨落会改变内积），可以将标架场的作用量 (11) 中相同下指标的求和，推广成相同上下指标的切和余切标架的内积求和，这样作用量就被推广成在标架展宽或等效加速或等效引力下不变的形式，

$$S_X = \frac{1}{2}\lambda\int d^4x\eta_{ab}\frac{\partial X_\mu}{\partial x_a}\frac{\partial X^\mu}{\partial x_b} = \frac{1}{2}\lambda\int d^4x\eta_{ab}g_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial x_a}\frac{\partial X^\nu}{\partial x_b} \tag{15}$$

这个标架场的作用量被称为非线性 σ-模型 (NLSM)，作为上一节量子时钟作用量 (6) 的推广。由于 X_μ 和 x_a 都是长度的量纲 $[L]$，所以 λ 是一个量纲为 $[L^{-4}]$ 的常数。我们后面会看到要回到标准的引力理论，这个常数需要取宇宙临界密度的值 $\lambda = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx (10^{-3}\text{eV})^4$，其中 H_0 是哈勃常数，G 是牛顿常数。

实验室系的全局时空参数 x_a 称为底空间，而时空参考系统的标架场 X_μ 称为靶空间。NLSM 是一种场论的映射模型，将底空间的坐标映射到靶空间坐标，$X(x): x \to X$，从数学的角度说，就是 NLSM 从一个平坦的底空间坐标映射生成一个可微流形 X，这个可微流形一般是弯曲的，标架场 X 就是局部的线性坐标（切空间或余切空间坐标），不同局部之间的波函数交叠构成二次型度量 $g_{\mu\nu}$，因此这个可微流形是黎曼的，$g_{\mu\nu}$ 就是黎曼度规。

NLSM 的映射也可以从量子参考系的双量子态空间直积的范式来看。如果要研究的量子系统看作就是时空本身 $|X\rangle$，而量子参考系统是实验室系 $|x\rangle$，那么它们之间的关系就由它们之间的纠缠态来描写 $\sum|X\rangle\otimes|x\rangle$。如同我们之前所讨论的，这个纠缠态就是一种局部 $|x\rangle \to |X\rangle$ 的映射的叠加。只是现在我们假设实验室系如果是一个平坦的全局坐标系，那么这时就不再需要先局部坐标片映射之后再粘（叠加）起来，而是退化成一个直积态映射了。用物理的语言来说，就是标架场 X 是平坦坐标系上函数或场。如果需要所有可能的映射没有数学奇异性，我们下一节会讨论不发生映射奇异性在数学上的条件。

显然 NLSM 的作用量形式上，在标架场的逐点的一般坐标变换 $X'_\mu = e^\nu_\mu(X)X_\nu + b_\mu$ 是不变的，因此这个弯曲的黎曼流形并不依赖于局部坐标片的选择，这个性质称之为坐标的经典微分同胚不变性，或者一般坐标变换不变性，但是这点在量子层面可能就会被破坏，我们将在（V C）详细讨论一般坐标坐标不变性的量子反常及其后果。

由于这里考虑的是带有时间部分负定的度规，所以这个靶空间中的距离二次型有可能是负定的，所以其实靶空间是一个 (赝) 黎曼时空。在很多情况经典物理的情况下，我们并不需要担心赝黎曼时空负定度规的问题，可以将大多数黎曼几何的定理推广应用到 (赝) 黎曼时空去。负定度规可能在量子层面出现一些问题，我们到后面还会讨论。

再考虑到，要研究的标量场 $\phi(x)$ 将来将不再参照实验室系的时空坐标 x，而将参照标架场构成的量子参考系坐标 X，整个理论将要给出的是要研究的标量场态 $|\phi\rangle$ 和标架场参考系态 $|X\rangle$ 之间的关系的理论，因此物理上我们预期这个理论将不再依赖于实验室系的坐标 x 及其度规 η_{ab}。我们的确观察到，比如当你做一个底空间的

坐标变换，将 Minkowski 的底空间变成 Euclidean 的底空间，$ix_0 \to x_4$。与此同时，$\sqrt{\det \eta_{ab}} \to i\sqrt{\det \delta_{ab}}$，其中 $\delta_{ab} = \text{diag}(1,1,1,1)$。所以

$$d^4x^{(M)} = \sqrt{\det \eta_{ab}} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = d^4x^{(E)} \sqrt{\det \delta_{ab}} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

于是体积元不变形式上不变。另外动能项的底时间做 Wick 转动从闵氏变成欧氏后，前面的底时空度规也跟着从闵氏变成欧氏 $\eta_{ab} \to \delta_{ab}$，因此整个作用量形式上保持不变，

$$S_X = \frac{1}{2}\lambda \int d^4x^{(M)} \sum_{a,b=0}^{3} \eta_{ab} g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x_a^{(M)}} \frac{\partial X^\nu}{\partial x_b^{(M)}} = \frac{1}{2}\lambda \int d^4x^{(E)} \sum_{a,b=1}^{4} \delta_{ab} g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x_a^{(E)}} \frac{\partial X^\nu}{\partial x_b^{(E)}}$$

简单的说，因为拉氏量可以看作是 $\eta_{ab}\eta^{ab}$ 是一个底时空上的拓扑不变量。所以将来我们不失一般性的，可以把底时空当作简单的欧式平坦底时空，这样在泛函积分量子化该理论的时候会带来一些方便。

D. 量子时空参考系的半经典近似

前面我们讨论的是关于时空标架场参考系，现在我们来看要研究的标量场 $\phi(x)$，不失一般性，我们考虑它的作用量是一个一般的标量场作用量

$$S_\phi = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_a} \frac{\partial \phi}{\partial x_a} - V(\phi) \right]$$

作为上一节物体作用量 (6) 的推广，其中我们也已经假设实验室系 x 是欧式平坦空间。由于标量场 ϕ 和标架场 X 之间没有相互作用，所以整个系统的作用量就是

$$S[\phi, X] = S_\phi + S_X = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_a} \frac{\partial \phi}{\partial x_a} - V(\phi) + \frac{1}{2}\lambda g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x_a} \frac{\partial X^\nu}{\partial x_a} \right] \tag{16}$$

和上一节完全类似，当标架场时空参考系的量子涨落 $\langle \delta X^2 \rangle$ 可以忽略，只考虑标架场的平均值 $\langle X \rangle$ 的半经典近似。正如前面讨论过的，我们在形式上在欧式的底空间中做泛函积分的配分函数，但其实在欧式和闵氏下结果是一样的，我们得到配分函数为

$$Z = \int \mathscr{D}\phi \mathscr{D}X e^{-S[\phi, X]} \overset{\text{半经典}}{\approx} \int \mathscr{D}\phi e^{-S[\phi(X)]} \tag{17}$$

其中半经典近似的有效作用量为

$$\begin{aligned} S[\phi(X)] &= \int dV(X^\mu) \left\| \frac{dx_a}{dX^\mu} \right\| \left\{ \frac{1}{4} \left\langle g^{(1)}_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x_a} \frac{\partial X^\nu}{\partial x_a} \right\rangle \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu}_{(1)} \frac{\delta \phi}{\delta X^\mu} \frac{\delta \phi}{\delta X^\nu} + 2\lambda \right] - V(\phi) \right\} \\ &= \int dV(X^\mu) \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu}_{(1)} \frac{\delta \phi}{\delta X^\mu} \frac{\delta \phi}{\delta X^\nu} - V(\phi) + 2\lambda \right] \end{aligned} \tag{18}$$

其中我们用到了关系

$$\left\langle g^{(1)}_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x_a} \frac{\partial X^\nu}{\partial x_a} \right\rangle \overset{\text{半经典}}{\approx} g^{(1)}_{\mu\nu} \frac{\partial \langle X^\mu \rangle}{\partial x_a} \frac{\partial \langle X^\nu \rangle}{\partial x_a} = g^{(1)}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{(1)} = D \equiv 4$$

在相差一个常数 2λ 的程度上，相对于标架场时空坐标的作用量 $S[\phi(X)]$ 就是原来相对于实验室底空间坐标 x 的作用量 S_ϕ，只是将对实验室底空间坐标的普通导数 $\frac{\partial}{\partial x}$ 变成了对标架场的泛函导数 $\frac{\delta}{\delta X}$。由于半经典近似忽略了标架场的量子涨落，标架场可以简单的只当作一个数，因此半经典近似的处理可以仅仅只看作是相当于做了一个坐标变换，从底空间坐标 x 变换成了靶空间坐标 X，而 Jacobian 行列式 $\left\|\frac{dx}{dX}\right\|$ 就是坐标变换带来的积分测度的经典变化。这个坐标变换，在半经典的层面，已经将一个原来表述在平坦的 Minkowski 或者 Euclidean

时空惯性系中的标量场 ϕ 的理论，表述到了一般非平坦的经典黎曼时空背景 X 上，(18) 复现了一个固定弯曲时空中的量子场论。

从这个半经典近似的结果我们还能看到，标架场时空参考系和底空间的维数在半经典近似下都等于 $D = d = 4$，因为 Jacobian 矩阵是一个方阵，因此底空间的维数 d 必须等于靶空间的维数 $D = 4$。因此半经典的说，我们描写标架场时空参考系的是一个 $d = 4$ 的 NLSM。然而一个 $d = 4$ 的 NLSM 在量子层面是否是完善定义 (well-defined) 的呢？就目前的认识，$d = 4$ 的 NLSM 在量子层面可能是不可重整的，在量子层面某些极端情况下 $x \to X$ 的映射可能会出现数学上的奇异性，导致在那些极端情况下理论不再能完善定义的了。所以我们也仅仅说 $d = 4$ 只是半经典近似下而言的，在半经典下我们完全可以把 d 就当作 4 看待，不会出现任何数学上的严重问题。但是到了超越半经典近似的量子层面，这点就不能严格做到了。好在其实底空间的维数并不是一个理论的可观测量，只是一个理论的参数，而且这个理论其实描写的只是 ϕ 和 X 之间关系的理论，本质上可以脱离底空间而存在，理论和底空间没有关系。底空间在这个理论的表述中，只是作为一个开始的实验室参照，来制备一个标架场的参考系统 X 和一个要研究的场系统 ϕ。而目前我们要制备和描写这样两套场系统，只能通过借助充分发展的，有着完善定义的惯性系平坦背景上的量子场论的语言。我们其实知道在量子层面底空间维数 d 其实会遭受反常维数的量子修正，使得有效的看，d 会在量子涨落中偏离半经典的 4，甚至会变成 $d < 4$ 的分数的维数。我们知道，当 $d = 2$ 或者 $d = 3$ 的时候 NLSM 就变得完全可重整了，而且 $d = 2$ 是微扰数幂的意义上就已经可重整了，而 $d = 3$ 虽然在微扰数幂意义上不可重整，但数值计算也告诉我们 $d = 3$ 也是非微扰可重整的，对于分数维数 $d < 4$ 在延拓的意义上也是可重整的。这个现象从拓扑的角度来看更明显。由于 NLSM 是一种 $x \to X$ 映射的量子场论模型，这个映射过程是否会出现数学奇异性，就决定了场映射 $X(x)$ 是否会出现数学奇异性。出于简单考虑，比如我们考虑靶空间的时空构型是一个将时间做了 Wick 转动后的球形紧的时空构型 $S^{D=4}$，那么现在要从一个 d 维的平坦的底空间 x 做连续可微的映射到 $X \in S^4$，所有可能的连续可微映射构成一个同伦群 $\pi_d(S^4)$。我们观察到此同伦群在 $d < 4$ 的时候都是平凡群 $\pi_{d<4}(S^4) = 0$，意味着所有可能的连续可微映射 $X(x)$ 不会遇到本质的拓扑障碍，因此所有可能的连续可微的映射都是数学上无奇异性的，可以完善定义的。但是 $\pi_{d=4}(S^4) = Z$ 并不是平凡群，说明存在一些映射会遇到拓扑障碍，这种拓扑障碍在路径积分量子化遍及所有可能路径的时候就无法被避免，因此就有可能出现数学上奇异而无法完善定义的映射，使得这个数学理论在量子层面是不能完善定义的。换句话说当这个理论在经历量子层面的重整化的时候就可能会出现不收敛的数学奇异性，理论是不可重整的，那个时候理论是失效的。所以如果你希望量子层面，所有情况下的映射，也就是量子场 $X(x)$ 都不会出现数学奇异性，我们就需要同伦群是平凡群，只要 $d < 4$ 就可以做到这一点，正如过去微扰的证明和非微扰数值计算的证明那样。所以为了让理论在量子层面是完善定义的，我们假设标架场是一个定义在 $d = 4 - \epsilon$ 维底空间上的 NLSM，其中 $0 < \epsilon \ll 1$ 表现得就像一个维数正规化的小参量，来避免 $d = 4$ 的可能量子层面奇异性的出现。使得而在半经典层面，作为我们对实验室系的生活常识，我们可以简单的将 d 看作 4 而没有严重的问题。

IV. 量子时空的 RICCI 流

从上一节我们看到在半经典近似下，如果忽略标架场时空参考系的量子涨落，只考虑其平均值，那么我们就得到一个定义在一般固定时空背景上的量子场论 (18)。在通常的弯曲时空中的量子场论中，我们在一般时空背景上研究上面的量子场，而现在有了量子的等效原理，逻辑可以倒过来，即通过时空上的量子场去研究背后的时空本身，在半经典的意义上，这类似于谱几何 (spectral geometry) 中"从鼓声听出鼓的几何形状"的问题。谱几何是把一个固定的黎曼几何 (M, g) 看作是在经典几何附近振动的东西。量子标架场参考系也是类似，通过研究几何（物质标架场）上的普适的量子动力学涨落来构建涨落所在的时空几何结构。但谱几何只研究固定黎曼几何背景上的涨落谱，并没有包含这些涨落对几何的反作用，而一个完整的量子参考系理论则应该自动包含这

些涨落对时空几何的反作用：一方面黎曼度量 g 会受到标架场的量子涨落的重整化，另一方面也在标架场概率统计密度 u 的统计平均的作用下，得到一种不同于固定的黎曼几何 (M,g) 的"流动的"密度黎曼几何或权重黎曼几何 (M,g,u)（density Riemannian geometry 或者 weighted Riemannian geometry），这是量子参考系理论和谱几何重要的不同之处。

如同 I所看到的，这样的半经典的弯曲时空量子理论取得了一定的成功，也有一定的困难。这样的固定弯曲背景上的量子场论就类似量子力学处理电子在固定的库仑电场上的行为，而忽略了库伦电场自身的涨落和对电子的反作用。如果你要理解原子光谱的 Lamb 移动和电子的反常磁矩，你就不能再将原子中的库伦电场当作静态的背景场了，而必须像量子电动力学一样更精细的考虑原子中电磁场的量子涨落以及对电子的反作用。这一章我们就来考虑标架场的超越平均场近似的量子涨落，由于半经典近似下只考虑标架场的平均值，也称为一阶矩 $\langle X\rangle$，所以作为最低阶的涨落效应，如果我们考虑近似到它们的方差，也称为二阶矩涨落 $\langle \delta X^2\rangle$，更一般的可以定义协方差矩阵 $\sigma^{\mu\nu}=\langle\delta X^\mu\delta X^\nu\rangle$。二阶矩近似也称为高斯近似。类似的，如果考虑到更高阶的 $\langle\delta X^n\rangle$，称为 n 阶矩涨落，当 $n>2$ 都称为非高斯的涨落。高阶矩的量子涨落在理论接近临界点相变或者临近时空局部奇点的时候才变得比较重要，而在通常的情况下一般比二阶矩涨落要次要。在这一章中我们考虑最低阶的二阶矩涨落近似，时空标架场的二阶矩涨落导致了时空的 Ricci 流效应。

A. 时空 Ricci 流方程的导出

要考虑超越平均场近似，我们就需要量子化标架场 NLSM 理论 (15)，在高斯近似下我们可以计算标架场相对于实验室系的展宽或涨落，即协方差矩阵

$$\sigma^{\mu\nu}=\langle\delta X^\mu\delta X^\nu\rangle=\lim_{d\to4}\frac{1}{\lambda}g_{(1)}^{\mu\nu}\int_0^{|p|=k}\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2}=\lim_{d\to4}\frac{1}{\lambda}g_{(1)}^{\mu\nu}\frac{k^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2+1)}=\frac{k^2}{32\pi^2\lambda}g_{(1)}^{\mu\nu} \tag{19}$$

其中 $k\in(0,\infty)$ 是 (时空均匀的) 做标架场的微扰单圈计算时积分的截断能标。我们在这里将 k 解释成重正化截断能标而不是解释成类似的标架场质量，是因为在量子等效原理的解释框架中对时空涨落的度量是和标架场的质量无关的 (见 V A)，即量子等效原理要求物质标架场一般坐标系下的涨落或展宽主要不是来自（质量依赖的）哈密顿能量的动力学驱动，而是来自特定量子涨落的截断的粗粒化效应。并且这个截断能标是一个从实验室系观察者看来联系不同局部标架场 (局部坐标片) 的全局不变量，而质量的定义其实强烈的依赖于实验室系 (NLSM 的底时空) 必须是一个外部惯性系，但在标架场所度量的内蕴时空几何的解释中这不是严格必须的。在这种意义上，量子标架场 X 度量得到的是一个在不同分辨尺度下粗粒化的普适时空几何，而不是不同质量的标架场度量到不同的非普适的时空几何。

另外，其中的

$$g_{(1)}^{\mu\nu}=\frac{\partial\langle X^\mu\rangle}{\partial x_a}\frac{\partial\langle X^\nu\rangle}{\partial x_a}=\langle e_a^\mu\rangle\langle e_a^\nu\rangle$$

是半经典近似下的时空度规，下标 (1) 表示是取标架场的一阶矩平均场近似。从 (13) 我们看到考虑到标架场的二阶矩修正 $\delta g_{(2)}^{\mu\nu}$，完整的度规是

$$\langle g^{\mu\nu}\rangle=\left\langle\frac{\partial X^\mu}{\partial x_a}\frac{\partial X^\nu}{\partial x_a}\right\rangle=\frac{\partial\langle X^\mu\rangle}{\partial x_a}\frac{\partial\langle X^\nu\rangle}{\partial x_a}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_a^2}\langle\delta X^\mu\delta X^\nu\rangle=g_{(1)}^{\mu\nu}+\delta g_{(2)}^{\mu\nu} \tag{20}$$

其中度规的二阶矩涨落为

$$\delta g_{(2)}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_a^2}\langle\delta X^\mu\delta X^\nu\rangle=-\frac{R_{(1)}^{\mu\nu}}{32\pi^2\lambda}k^2 \tag{21}$$

而 $R_{(1)}^{\mu\nu}\overset{\text{线性}}{\approx}-\frac{1}{2}\Delta g_{(1)}^{\mu\nu}\overset{\text{半经典}}{\approx}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_a^2}g_{(1)}^{\mu\nu}$ 是半经典近似下 $g_{(1)}^{\mu\nu}$ 给出的 Ricci 曲率，其中在一阶矩近似下，底空间的拉普拉斯算子 $\frac{\partial^2}{\partial x_a^2}$ 在半经典近似下给出靶时空的拉普拉斯算子 Δ。

这个微扰近似的有效性是建立在二阶矩贡献远小于一阶矩贡献的基础上，$\delta g^{\mu\nu}_{(2)} \ll g^{\mu\nu}_{(1)}$。我们观察到由于 $\lambda = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ 是临界密度的量级，如果 Ricci 曲率远离局部时空奇点，是哈勃常数平方的量级，$R^{\mu\nu}_{(1)} \sim O(H_0^2)$，那么只要标架场的能标小于 Planck 能标 $\delta k^2 \ll \frac{1}{G}$，那么这个微扰近似就是好的近似。只有当接近时空局部奇点的时候，微扰近似才开始失效，但这时高阶矩涨落也开始重要了，本章我们只考虑在二阶矩小于一阶矩，而大于高阶矩的高斯近似的情况。

利用 $\delta g^{\mu\nu}_{(2)} = -\delta g^{(2)}_{\mu\nu}$，方程 (21) 其实不是别的，正是 Ricci 流方程

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial t} = 2R^{\mu\nu} \quad \text{或} \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = -2R_{\mu\nu} \tag{22}$$

其中流参数

$$t = -\frac{1}{64\pi^2\lambda}k^2 \in (-\infty, 0) \tag{23}$$

的量纲是 $[L^2]$。t 的量纲与底空间的维数 d 无关，因为如果底空间是 d 维，里面截断变成 k^{d-2}，而 λ 的量纲也会相应变成 $[L^{-d}]$。流参数 t 生成一个对标架场的靶时空几何的连续变形，这个局部的几何变形是正比与局部的 Ricci 曲率，所以称为 Ricci 流。我们可以把 Ricci 流方程看作就是标架场的 RG 方程的高斯近似。

我们看到切空间和余切空间的 Ricci 流方程的右边相差一个负号，因此它们 Ricci 流行为正好是相反的，如果不特别指明，我们在后文中指的都是切空间度规 $g_{\mu\nu}$ 的 Ricci 流，和数学文献的约定一致。

由于 Ricci 曲率在线性阶给出 $R_{\mu\nu} \overset{\text{线性}}{\approx} -\frac{1}{2}\Delta g_{\mu\nu}$，所以在线性近似下，Ricci 流就像是一个线性的热方程

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} \overset{\text{线性}}{\approx} \Delta g_{\mu\nu}$$

但由于 Ricci 曲率严格来说对度规是非线性的，所以 Ricci 流方程可以看作是一个非线性版的度规的热方程。像通常的热方程一样，随着 t 参数的流动，Ricci 流方程的确会在一些初始几何下，导致一种几何度规的粗粒化过程，逐渐抹掉初始度规的不均匀性和各向异性。但由于方程是非线性的，另外一些初始条件也可能会在 Ricci 流演化过程导致局部度规演化出奇异性，就算我们已经通过适当的选择 $d = 4 - \epsilon$ 参数使得 NLSM 的同伦群平凡化，避免了本性奇点的发生，但局部奇点还是有可能会出现在 Ricci 流的演化过程中，这些奇点并非本性奇点，可以通过适当的手术去除。如果一些初始条件，在 Ricci 流的整个过程中都不出现局部奇点，那么称为 Ricci 流的长期解 (long flow-time solution)。在长期解中，Ricci 流参数 t 从紫外 UV 短程高能极限 $k \to \infty$，即 $t \to -\infty$，流到红外 IR 长程低能极限 $k \to 0$，即 $t \to 0$。在整个流动过程中，Ricci 流逐渐将特定截断尺度内的短程细节平均掉之后给出在这个特定尺度的度规以量子修正。在这个平均或者粗粒化的过程中，几何短程内的细节的信息逐渐的丢失，因此 Ricci 流像热方程一样，沿着 t 的方向是不可逆的，即没有逆向流的解存在，我们将在后面看到，这将导致非常重要的物理后果，比如时空的非幺正性，时空熵以及类似时空的 H-定理的起源。

另外我们还从 (20) 看到 Ricci 流会产生对度规的修正，导致黎曼几何中的距离/度量二次型受到量子二阶矩涨落的修正，因此在 Ricci 流下黎曼几何不再是等距的了 (non-isomety)。这是后面我们会讨论到的量子层面产生一般坐标变换不变性反常的根本原因。然而不等距对于时空的拓扑并不重要，数学上已经证明在 Ricci 流过程中，几何的拓扑是保持的。Ricci 流过程中，度规并不保持，几何局部的形状和大小 (体积) 这些由度规来描写的几何量都会随着 Ricci 流而改变。Ricci 流也存在一种特殊的解，称为 Ricci 孤立子，这种解在 Ricci 流的过程中只改变大小 (体积) 而不改变局部形状，因此这是一种自相似的几何构型。Ricci 孤立子对研究 Ricci 流非常有用，我们后面在研究红外宇宙学尺度，以及时空在“热平衡”下热力学中会就用到，将来我们会看到 Ricci 孤立子是一种流的极限构型，是为一种重整化群流的不动点的恰当推广，如果我们将 Ricci 流看作是时空的重整化群流的话。

Ricci 流最早是 1980 年代 Friedan 在研究 $d = 2 + \epsilon$ 的 NLSM 的重整化群流中引入的，同时 Hamilton 在数学领域也独立的引入了 Ricci 流方程。在数学中引入的主要动机是流形的分类问题，一个特别的目的是为了证

明庞家莱猜想等几何猜想。Hamilton 将 Ricci 流方程视为一种非常有用的工具来将一个初始流形逐渐变形成越来越简单的流形，由于 Ricci 流是保持拓扑的，所以流形会最终流到那些拓扑能够被简单的看出来的简单流形。对三维流形的分类问题，Hamilton 证明了某些特定的初始条件下 Ricci 流的行为是好的，但是在一般初始条件下，流形可能会在一些局部产生瓶颈 (neckpinch) 等奇异性的现象，造成 Ricci 流被中断，而无法继续流到最后的全局流终点，如何处理这些瓶颈的奇异性这是 Ricci 流主要的技术困难。这些局部奇异性的区域通过局部放大，越来越接近有限种类的 Ricci 孤立子构型，可以据此了解其局部的拓扑。然后通过手术将这些局部奇异性的区域分割开来，切开的局部区域替换成一些好的局部流形，就能让 Ricci 流继续流下去，如果再遇到奇异性，再重复上述的步骤，经过有限的步骤之后，最终流形会被手术分割成有限块切割出来的部分而不再遇到奇异性而最终流到 Ricci 流的流终点。我们可以通过观察这些分割出来的有限块流形的 Ricci 流终点所展示出来的简单推拓扑来了解初始流形是由哪些种类的拓扑组成的，进而了解初始流形的整体拓扑构成。比如一个初始流形经过上述 Ricci 流 + 手术的有限步骤之后最终得到有限个三维球块，那么我们就知道最初流形拓扑等价于一个三维球，从而证明庞加莱猜想。如果一个初始流形经过 Ricci 流 + 手术的有限步骤之后，得到了有限多种不同种类的流形块，那么证明无论初始三维流形有多复杂，最后都能看作由有限种最基本的拓扑组成的，比如三维空间中只有 8 种可能的基本拓扑结构（Thurston 猜想），是三维空间的基本的“原子”。这种通过 Ricci 流来分类几何拓扑的方法从物理的角度看其实就是建立量子几何的 Hilbert 空间，从一个初始的试探波函数出发，经过重整化群流逐渐将短程高能的自由度平均掉，如果遇到奇异性就通过类似手术的方法让波函数继续流动下去，让波函数最终逐渐收敛到有限几种拓扑稳定的波函数上，这些有限几种拓扑稳定的波函数就构成一个有限维的 Hilbert 空间，而每一类拓扑态波函数在形变扰动下都是不变的（拓扑稳定）。

但在三维流形的 Ricci 流过程中，Hamilton 无法排除一种雪茄型孤立子在三维空间的 Ricci 流中出现的可能。直到 2003 年左右，Hamilton 的这个纲领才得以完成，Perelman 通过引入在 Ricci 流过程中若干个单调变化的泛函，发现了 Ricci 流（严格的说是 Ricci-DeTurck 流，它在相差一个微分同胚的程度上和 Ricci 流是等价的）的变分结构。通过引入单调的 W 熵泛函，Perelman 能够证明了一系列重要的数学定理，比如局部非塌缩定理。通过局部非塌缩定理排除了 Hamilton 的雪茄形孤立子的出现的可能，最终证明了三维空间（严格的说是三维密度空间）上的 Thurston 分类猜想以及庞家莱猜想。Perelman 的泛函，比如 W 熵泛函，虽然借助了一些统计热力学中的类比，但目前人们对 Ricci 流和 Perelman 的泛函具体的物理意义和图像仍然还是不清楚的，这些我们在后面还会更详细的讨论。

Ricci 流方法被证明不仅可以被用于研究紧的黎曼流形，还能用于研究非紧的黎曼流形，这点在研究临近奇异性的几何局部的放大时特别重要，而且还有迹象表明 Ricci 流可以被用来研究带有负定度量的 (赝) 黎曼流形，Ricci 流也特别适合于研究几何的短程和长程性质，Ricci 流很多方面的研究也还在不断的发展完善之中。

B. 高斯近似下的标架场的 u 密度 (固定的时空几何背景)

到目前为止，虽然我们前面已经多次谈及标架场的量子期待值 $\langle ... \rangle$ 了，比如时空坐标的一阶矩（中心值）$\langle X_\mu \rangle = e^a_\mu x_a$，以及通过微扰单圈计算标架场的二阶矩 (坐标展宽)$\langle \delta X^2 \rangle$，但我们还没有非常明确的给出计算这些期待值所用的波函数 $|X\rangle \in \mathscr{H}_X$ 的形式，然后标架场的量子期待值可以定义为

$$\langle \hat{O} \rangle \equiv \langle X|\hat{O}|X\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathscr{D}XOe^{-S_X} = \lambda \int dV(X)\,\Psi_0^*(X)\,\hat{O}\Psi_0(X) = \lambda \int dV(X)\,u(X)\,\hat{O} \tag{24}$$

其中标架场的泛函积分中的量子效应都放进了波函数 $\Psi_0(X)$ 里面，因此在用波函数计算期待值的时候，我们可以将标架场的积分看作经典的 4 维靶空间的普通积分，经典坐标变换意义下的不变体积元可以写成（后面我们

会看到的在量子层面的坐标变换的意义下，这个不变体积元由于 $g_{\mu\nu}$ 随 Ricci 变化，因此是会改变的）

$$dV(X) = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} d^4 X^\mu \tag{25}$$

后文我们都用 $dV(X)$ 来简写 X 坐标的不变体积元，但不要忘了里面还有一个 Jacobian。积分前面的 λ 是 NLSM 的输入参数，是出于方便，让波函数和相应的密度无量纲化。而其中

$$u(X) = \Psi^*(X)\Psi(X) \tag{26}$$

是标架场在 X 点的密度，满足归一化关系

$$\lambda \int dV(X)\, u(X) = 1 \tag{27}$$

出于解释上的方便的考虑，我们后面谈到对 u 的 4-时空积分会给 u 密度配一个基本常数 4-密度 λ，以使得 λu 是密度的量纲 $[L^{-4}]$ 在积分 $\int dV$ 后归一化，而让概率密度 u 作为概率和体积比而保持无量纲。

由于 Ricci 流方程相当于标架场 RG 流方程的高斯近似，在准确到高斯近似的程度，我们在这一节中我们将给出标架场在量子化后的密度基本解 $u_{\text{基本解}}$ 的直观形式定义，作为经典 Dirac delta 密度的推广。

要求解标架场的波函数，本质上需要先将标架场的 NLSM 作用量 S_X(15) 重新写成哈密顿量的形式，标架场的波函数就是这个哈密顿量的本征波函数。虽然 4 个标架场之间是有交叠的，所以它们之间有相互作用，但这种相互作用可以有效的吸收到标架场的自能修正或者展宽中去，而在其他方面 NLSM 都表现得像是自由场或者谐振子。所以在高斯近似下，NLSM 的波函数的基本解可以通过将自由场或者谐振子的基态高斯型波函数给出，以 $\langle X^\mu \rangle = e^\mu_a x_a$ 是高斯波函数的中心值，以 $\sigma_{\mu\nu}$ 为相应的高斯波函数的二阶矩展宽。利用 (19) 给出微扰单圈计算得到的二阶矩涨落，我们有切时空标架场的二阶矩展宽 $\sigma_{\mu\nu}$ 和余切时空标架场的二阶矩展宽 $\sigma^{\mu\nu}$，

$$\sigma_{\mu\nu} = \langle \delta X_\mu \delta X_\nu \rangle = \frac{1}{\langle \delta X^\mu \delta X^\nu \rangle} = \frac{1}{\sigma^{\mu\nu}} \tag{28}$$

所以 (12) 中的直积态 $|X^\mu\rangle \otimes |X^\nu\rangle \otimes |X^\rho\rangle \otimes |X^\sigma\rangle$ 在实验室坐标表象 $|x\rangle$ 中就可以明显的写成以平均值 $\langle X^\mu \rangle = e^\mu_a x_a$ 为中心，$\sigma_{\mu\nu}$ 为宽度的高斯型波函数

$$\Psi_0(X) \overset{\text{高斯}}{\approx} \frac{1}{\sqrt{Z}} \exp\left[-\frac{1}{4}\left|(X^\mu - e^\mu_a x_a)\,\sigma_{\mu\nu}\,(X^\nu - e^\nu_a x_a)\right|\right] \tag{29}$$

描写在中心值 $\langle X^\mu \rangle = e^\mu_a x_a$ 附近的余切空间上的波函数。在而一般的时空标架场的量子态 (12) 是所有基本解的量子叠加。利用归一化条件 (27)，体积元 (25) 和高斯积分公式

$$\int d^m x \exp\left(-\frac{1}{2} A_{ij} x_i x_j\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^m}{\det A}}$$

我们得到归一化系数 $1/\sqrt{Z}$

$$\frac{1}{Z}\int dV(X)\, \exp\left[-\frac{1}{2}\left|(X^\mu - e^\mu_a x_a)\,\sigma_{\mu\nu}\,(X^\nu - e^\nu_a x_a)\right|\right] \approx \frac{1}{Z}\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}\sqrt{\frac{(2\pi)^4}{|\det \sigma_{\mu\nu}|}} = 1$$

可得

$$Z = (2\pi)^2 \frac{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}}{\sqrt{|\det \sigma_{\mu\nu}|}}$$

指数上的二次型的绝对值符号是为了保证在 (赝) 黎曼时空中二次型也正定，使得归一化系数中的行列式 $\det \sigma_{\mu\nu}$ 和 $\det g_{\mu\nu}$ 都是带绝对值符号因此也正定的。于是我们得到中心值 $x = \langle X \rangle$ 附近的 X 点的密度

$$u_{\text{基本解}}(X) \overset{\text{高斯}}{\approx} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\sqrt{|\det \sigma_{\mu\nu}(x)|}}{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}(X)|}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left|(X^\mu - e^\mu_a x_a)\,\sigma_{\mu\nu}\,(X^\nu - e^\nu_a x_a)\right|\right] \tag{30}$$

这个基本解在 $\tau\to 0$ 时，x 点附近的展宽为 $\sigma_{\mu\nu}(x)\to\frac{1}{2\tau}g_{\mu\nu}(x)$，此时展宽 $\sigma_{\mu\nu}$ 和度规 $g_{\mu\nu}$ 成正比，协变梯度是零 $\nabla_\rho\sigma_{\mu\nu}=0$，是一个均匀的展宽。因此 $\frac{\sqrt{|\det\sigma_{\mu\nu}(x)|}}{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}(X)|}}\to\frac{1}{(2\tau)^2}\frac{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}(x)|}}{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}(X)|}}=\frac{1}{(2\tau)^2}\frac{dV(x)}{dV(X)}=\frac{1}{(2\tau)^2}u_0(X)$，即基本解的初始条件 $\lim_{\tau\to 0}u_{基本解}(X)=u_0(X)\delta^{(D)}(X-x)$，$u_0(X)=\frac{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}(x)|}}{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}(X)|}}$ 是一个 Jacobian，称为 X 点的初始密度。一般解是所有时空点上的基本解的叠加

$$u(X)=\int dV(x)u_{基本解}(X)$$

这个一般解，在 $\tau\to 0$ 时，回到其初始条件

$$u(X)=\int dV(x)u_{基本解}(X)\overset{\tau\to 0}{=}\int dV(x)u_0(X)\delta^{(D)}(X-x)=u_0(x)$$

因此，一方面，在 $\tau\to 0$ 时，X 坐标的密度会回到 x 坐标的密度，即涨落的坐标 X 的中心值其实就是 x，但 X 在有限 τ 时会在 x 附近被展宽，另一方面，我们看到基本解可以看作是从坐标中心值 x 到周围涨落值 X 的跃迁振幅 $K(X,x)$。

一般的，通过这个 $u(X)$ 密度，坐标中心值和二阶矩展宽的期待值都可以得到定义

$$\langle X^\mu(x)\rangle\equiv\lambda\int dV(X)\left[X^\mu\right]u\left(X\right)$$

$$\langle\delta X^\mu(x)\delta X^\nu(x)\rangle\equiv\lambda\int dV(X)\left[\delta X^\mu(x)\delta X^\nu(x)\right]u\left(X\right)$$

我们知道，高斯展宽 $\sigma_{\mu\nu}=\langle\delta X_\mu\delta X_\nu\rangle$ 并不是规范不变的，在小坐标变化下 $X_\nu\to X'_\mu=e^\nu_\mu X_\nu\approx\delta^\nu_\mu X_\nu+\epsilon_\mu$，像一个张量一样的变换

$$\sigma_{\mu\nu}(X)\to\sigma_{\mu\nu}(X')=\sigma_{\mu\nu}(X)+\nabla_\mu\epsilon_\nu+\nabla_\nu\epsilon_\mu=\sigma_{\mu\nu}+\nabla_\mu\nabla_\nu h$$

其中 ϵ_μ 和 h 是 X 的很小的但却任意的函数。因此 u 密度也不是规范不变的，依赖坐标系的选择。

这个波函数 $\Psi(X)$ 作为标架场 X 的泛函是 NLSM 的高斯近似下的基本解，是一个直积态，而一般解可以通过这个直积态适当的线性叠加 (12)，并将中心值 x 适当的积分掉来得到。

根据量子力学的概率解释，密度描写了在体积元 $dV(X)$ (25) 内找到标架场粒子的概率密度，当标架场的二阶矩涨落很小可以忽略的时候，密度就是以 $\langle X^\mu\rangle=e^\mu_a x_a$ 为中心值的 Dirac delta 函数，标架场粒子非常精确的处于中心值位置，给出无限精确的经典时空参考系坐标（概率密度）。当标架场的二阶矩量子涨落比较重要不能忽略的时候，密度描写的是经典坐标中心值不变，但标架场粒子以弥散的分布在中心值附近，时空坐标看起来被量子涨落高斯模糊了。

这种高斯模糊化也可以看作是一种标架场的粗粒化。当 Ricci 流随着参数 t 流动的时候，体积元 $dV(X_t)=\lim_{\Delta V_t\to 0}\Delta V_t(X)$ 随之变化，于是在体积元内找到标架场粒子的概率 u 也会逐渐随着 Ricci 流而变化。不失一般性，如果我们认为在实验室系短程紫外尺度中，我们考虑实验室中心值 x 附近积元 d^4x 内找到标架场粒子的概率密度是 1，满足全实验室底时空的归一化条件 $\lambda\int 1\cdot d^4x=1$，那么随着 t 参数逐渐从实验室紫外尺度流向红外，原点附近的时空坐标随着 Ricci 流逐渐高斯模糊化，概率密度逐渐从 1 变成 $u_t\left(X\right)$，并满足全时空的归一化条件 $\lambda\int u_t\left(X\right)d^4X_t=1$。对比之下，我们看到在中心值 x 附近，高斯模糊化之后的体积元内找到标架场粒子的概率密度是

$$u_t\left(X\right)=\lim_{\Delta V_t\to 0}\frac{1}{\Delta V_t(X)}\int_{\Delta V}1\cdot d^4x=\langle 1\rangle_{\Delta V_t\to 0}=\frac{dV(x)}{dV(X_t)}\tag{31}$$

这个 $u(X)$ 密度其实描写的就是时空标架场的粗粒化概率密度。在这个意义上，u 密度扮演了类似 Boltzmann 粒子分布函数的角色，类似的 u 密度应该满足某个类似 Boltzmann 粒子分布函数满足的随 t 演化不可逆的

Boltzmann 方程，并且类似的应该给出一个通过粒子分布函数构造的 Boltzmann 的 H 函数，满足一个类似 H 定理的单调性定理，扮演某种系统熵的角色。

我们还可以定义在 x 附近任何两个不同点 X 和 $\hat{X}$ 之间的跃迁振幅 $K\left(\hat{X},X\right)$，

$$\begin{aligned} K\left(\hat{X},X\right) &= \int dV(x)\, K\left(\hat{X},x\right) K\left(X,x\right) \\ &\approx \frac{1}{Z\hat{Z}} \int dV(x)\, \exp\left[-\frac{1}{2}\left|\left(\hat{X}^{\mu}-e^{\mu}_{a}x_{a}\right)\hat{\sigma}_{\mu\nu}\left(\hat{X}^{\nu}-e^{\nu}_{a}x_{a}\right)\right|\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\left|\left(X^{\mu}-e^{\mu}_{a}x_{a}\right)\sigma_{\mu\nu}\left(X^{\nu}-e^{\nu}_{a}x_{a}\right)\right|\right] \\ &= \frac{1}{Z'} \exp\left[-\frac{1}{2}\left|\left(\hat{X}^{\mu}-X^{\mu}\right)\sigma'_{\mu\nu}\left(\hat{X}^{\nu}-X^{\nu}\right)\right|\right], \quad \left(X,\,\hat{X}\sim x\right) \end{aligned} \tag{32}$$

跃迁振幅的展宽和归一化系数为

$$\sigma'_{\mu\nu} = \frac{1}{\sigma'^{\mu\nu}} = \frac{1}{\hat{\sigma}^{\mu\nu}+\sigma^{\mu\nu}}, \quad Z' = (2\pi)^{2} \frac{\left|\det g_{\mu\nu}(X)\right|^{1/4}\left|\det \hat{g}_{\mu\nu}(\hat{X})\right|^{1/4}}{\left|\det \sigma'_{\mu\nu}\right|^{1/2}} \tag{33}$$

当展宽变成均匀展宽 $\sigma'_{\mu\nu} = \hat{\sigma}^{\mu\nu}+\sigma^{\mu\nu} = \frac{\sqrt{\det g(\hat{X})}}{\sqrt{\det g(X)}}\frac{1}{2\tau}\hat{g}_{\mu\nu}(\hat{X})$ 时，(19)，归一化系数则反映了初末坐标系的体积比

$$Z' = (2\pi)^{2} \frac{\left|\det g_{\mu\nu}(X)\right|^{1/4}\left|\det \hat{g}_{\mu\nu}(\hat{X})\right|^{1/4}}{\frac{1}{(2\tau)^{2}}\left|\frac{\sqrt{\det \hat{g}(\hat{X})}}{\sqrt{\det g(X)}}\det \hat{g}_{\mu\nu}(\hat{X})\right|^{1/2}} = (4\pi\tau)^{2}\frac{\sqrt{\det g_{\mu\nu}(X)}}{\sqrt{\det \hat{g}_{\mu\nu}(\hat{X})}} = (4\pi\tau)^{2}\frac{dV(X)}{dV(\hat{X})}$$

任意两点跃迁振幅描写两个不同标架场粒子 X 和 $\hat{X}$ 共同发生的振幅，两个高斯密度的交叠仍然是一个高斯密度，仅仅只是形式上，把 X 系的展宽 $\sigma^{\mu\nu}$ 和 $\hat{X}$ 系的展宽 $\hat{\sigma}^{\mu\nu}$ 合成成了联合宽度 $\sigma'^{\mu\nu}$。而且这联合宽度 $\sigma'^{\mu\nu}$ 总是大于 $\sigma^{\mu\nu}$ 和 $\hat{\sigma}^{\mu\nu}$，换言之高斯函数满足

$$K_{\hat{\sigma}^{\mu\nu}+\sigma^{\mu\nu}}\left(\hat{X},X\right) = \int dV(X')\, K_{\hat{\sigma}^{\mu\nu}}\left(\hat{X},X'\right) K_{\sigma^{\mu\nu}}\left(X,X'\right) \tag{34}$$

两点跃迁振幅 $K\left(\hat{X},X\right)$ 就形同把 $K\left(X,x\right)$ 中没有展宽的实验室 $x=\langle X\rangle$ 坐标转换成了带有内禀展宽的 $\hat{X}$ 系的坐标，所以展宽变大了。这就是跃迁振幅不可逆的进一步粗粒化和坐标模糊化的过程。这称之为跃迁振幅的半群性质（semi-group property）。

由于 $K\left(\hat{X},X\right)$ 是从 X 系和 $\hat{X}$ 系之间的跃迁振幅，是一个 X 和 $\hat{X}$ 同时发生的联合振幅。如果现在观察者站在 X 系看 $\hat{X}$ 系，即在 X 系发生的条件下，看 $\hat{X}$ 系相对于 X 系发生的相对振幅，就可以写成

$$\tilde{K}\left(\hat{X}|X\right) \equiv \frac{K\left(\hat{X},X\right)}{K\left(X,x\right)} \tag{35}$$

类似相对概率 (2)。我们看到，量子参考系的协变作用量表述下计算的相对振幅 $\tilde{K}\left(\hat{X}|X\right)$，有和正则表述（基于 Wheeler-DeWitt 方程，比如 (8)）的纠缠态解（比如方程 (1)）类似的相对概率或条件概率的解释 (见 2)。

由于热核满足交换关系 $K\left(\hat{X},X\right) = K^{*}\left(X,\hat{X}\right)$，其中 $*$ 表示复共轭，换言之 K 矩阵是共轭转置不变的，即厄密的，有实本征值。所以将 X 和 $\hat{X}$ 互换可得 $\tilde{K}\left(X|\hat{X}\right) = \frac{K^{*}\left(\hat{X},X\right)}{K\left(\hat{X},x\right)}$，因此就有

$$\tilde{K}\left(\hat{X}|X\right) K\left(X,x\right) = \left[\tilde{K}\left(X|\hat{X}\right) K\left(\hat{X},x\right)\right]^{*} = \tilde{K}^{*}\left(X|\hat{X}\right) K^{*}\left(\hat{X},x\right)$$

得到量子振幅版本的“贝叶斯 (Bayes) 公式”

$$\tilde{K}\left(\hat{X}|X\right) = \frac{\tilde{K}^{*}\left(X|\hat{X}\right) K^{*}\left(\hat{X},x\right)}{K\left(X,x\right)} \tag{36}$$

其模平方就给出概率的贝叶斯公式。

由于一般 $K\left(\hat{X},X\right)=\int dV(x)\,K\left(\hat{X},x\right)K\left(X,x\right)\neq K\left(\hat{X},x\right)K\left(X,x\right)$, 所以一般 $\tilde{K}\left(\hat{X}|X\right)\neq K\left(\hat{X},x\right)$, 即在 X 系看到的 $\hat{X}$ 的 (相对) 振幅 $\tilde{K}\left(\hat{X}|X\right)$ 和实验室 x 系看到的 (绝对) 概振幅 $K\left(\hat{X},x\right)$ 并不相同，在 X 系看到 $\hat{X}$ 系的相对展宽 $\tilde{\sigma}_{\mu\nu}$ 和实验室 x 系看到 $\hat{X}$ 系的展宽 $\hat{\sigma}_{\mu\nu}$ 一般并不相等。当 X 系的展宽 $\sigma^{\mu\nu}$ 近似可以忽略的时候，X 系看到的 $\hat{X}$ 系的相对展宽才是将联合展宽 $\sigma'^{\mu\nu}$ 扣除掉 X 系展宽 $\sigma^{\mu\nu}$ 之后剩下的展宽，即

$$\tilde{\sigma}^{\mu\nu}\approx\sigma'^{\mu\nu}-\sigma^{\mu\nu} \tag{37}$$

我们后面将通过这个办法来计算带有量子展宽 $\sigma^{\mu\nu}$ 的一般坐标系 X 变换到一个新坐标系 $\hat{X}$ 之后相对于原来 X 系的相对宽度 $\tilde{\sigma}^{\mu\nu}$。

值得指出的是，上面给出标架场的密度基本解 (30)、跃迁振幅 (32) 和相对振幅 (36) 只是从我们比较熟悉的教科书（幺正的和背景固定的）量子力学的角度出发，直观和形式上的讨论。更严格的讨论，我们需要在下一节将其建立在热核或密度矩阵的共轭热方程的概念基础上。我们也将推广固定背景几何上的跃迁振幅 $K(\hat{X},X)$ 的概念，使其和一个 Ricci 流演化的背景几何耦合在一起，这时振幅坐标的交换对称性和幺正性等都只能看作是经典固定几何背景极限下的近似。

C. Ricci-DeTurck 流方程和共轭热方程

u 密度不仅有着深刻的统计物理意义，还有着重要的几何意义，从 (31) 我们也可以看出 u 密度也描写了黎曼几何中非常关键的一个量，几何局部的体积比。局部引入的 u 密度还可以将统计的概念引入几何中，将通常以黎曼度规为基础的黎曼几何 (M^4,g) 推广成为以度规和局部密度为基础的密度黎曼几何 (M^4,g,u)。这种密度几何虽然看起来好像只是在经典黎曼几何每个局部的坐标点上长了一个正定的密度丛，但现在这个局部的密度丛可以描写这个局部坐标点另外一个重要的量子特征，即 $u(X)$ 密度这个局部坐标点 X 的高斯模糊化，所以密度几何也可以看作是一种带有量子二阶矩涨落 (如果密度是高斯型的) 的量子的黎曼几何。Perelman 在 2003 年提出对庞加莱猜想的最终证明的概念框架中实际上考虑的就是密度黎曼几何，而不是简单的黎曼几何了。密度黎曼几何在数学中很早就被提出，但对它的研究还不够，在把它引入到物理中去的研究就更少了。在密度黎曼几何中有很多种有用的 Ricci 曲率概念的推广，一种广泛接受的推广形式是 Bakry-Emery 推广

$$R_{\mu\nu}\to R_{\mu\nu}-\nabla_\mu\nabla_\nu\log u\equiv R_{\mu\nu\,(u)} \tag{38}$$

这种形式的 Ricci 曲率其实也正是 Perelman 在 2003 年文章中采用的形式，我们后面也会看到，这种推广在物理上也是自然的。在这种推广下 Ricci 流方程 (22) 被推广成 Ricci-DeTurck 流

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t}=-2\left(R_{\mu\nu}-\nabla_\mu\nabla_\nu\log u\right) \tag{39}$$

由于推广的 Ricci 曲率种的 $\nabla_\mu\nabla_\nu\log u$ 项从黎曼几何的角度看，只是一个对 Ricci 曲率的规范变换 (微分同胚变换)，所以这个新的方程在相差一个微分同胚的程度上，和 Ricci 流 (22) 是完全等价的，只是考虑了标架场展宽 $\nabla_\mu\nabla_\nu\log u$ 对经典曲率的贡献。数学上，DeTurck 提出这个方程的原因在于，由于 Ricci 流方程只是弱抛物型的方程，而 Ricci-DeTurck 流则是强抛物型方程，则它的短期解的存在性和解的唯一性的证明要更简单一些，这在数学上也被称为 DeTurck 技巧（DeTurck trick）。后来 Perelman 发现 Ricci-DeTurck 流方程可以作为他所提出的单调泛函的梯度流，从而相当于发现了 Ricci-DeTurck 流的变分结构，对于 Perelman 证明密度黎曼几何中的定理非常重要。如果没有特别的指出，我们后文中我们谈论的时空的 Ricci 流指的都是密度时空的 Ricci-DeTurck 流。

密度黎曼几何 (M^4, g, u) 的几何流除了度规 g 的 Ricci-DeTurck 流之外，我们还需要找到 u 密度关于参数 t 变化的流方程，作为粒子分布函数满足的 Boltzmann 方程的类比。从归一化条件 (27) 我们可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}\right)=0 \tag{40}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\sqrt{|g|}\frac{\partial u}{\partial t}&=-u\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{|g|}\\
\frac{\partial u}{\partial t}&=-\frac{u}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t}\\
&=\frac{u}{\sqrt{|g|}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\right)2\left(R_{\mu\nu}-\nabla_\mu\nabla_\nu\log u\right)\\
&=u\left(R-\frac{\Delta u}{u}\right)\\
&=\left(-\Delta+R\right)u
\end{aligned} \tag{41}$$

其中 Δ 是靶 4-时空上的 Laplacian 算子（D'Alembert 算子）。注意到 Jacobian 的绝对值符号对体积的定义，这个结果对黎曼和赝黎曼几何都成立。注意到 Δ 前面的负号，这个流方程其实是一个逆向的类-热方程。一般来说逆向热方程的解是不存在的，因为逆向热方程意味着熵的减小需要输入额外的信息。但我们也注意到如果让 Ricci-DeTurck 流将 g 流从 t_i 流到某个红外奇异性发生的尺度 t_*，由于前面我们证明过 u 密度有一个规范的任意性，不同的的 u 密度可以导致相同的 Ricci 流（在相差一个微分同胚规范的程度上），因此选择不同的 u 密度只是类似于在选不同的规范。所以在尺度 t_* 我们可以任意的选一个 $u(t_*)=u_0$ 作为初始密度，然后从这个初始密度以 $\tau=t_*-t$ 为逆流参数，逆向流动的求解出 $u(\tau)$。我们前面也证明过，通过恰当的选择 NLSM 的 $d=4-\epsilon$ 参数给出的平凡同伦映射群，可以避免全局奇异性而流到极端红外，这种情况下可以简单的认为 $t_*=0$，于是逆流参数就是

$$\tau=0-t=\frac{1}{64\pi^2\lambda}k^2\in(0,\infty) \tag{42}$$

这种情况下 u 密度满足方程形式上的确就满足一个类-热方程

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\left(\Delta-R\right)u \tag{43}$$

这个方程称为共轭热方程（conjugate heat equation）。这个方程如同通常的类-热方程一样，从 t_* 逆流到 t 的解 $u(\tau)$ 的确是存在的，它的基本解就形如热核 (heat kernel) 。这个方程也类似于一个 (虚) 时演化的 Schrödinger 方程。

之所以称其为共轭热方程，是因为算子

$$\Box^*\equiv-\frac{\partial}{\partial t}-\Delta+R$$

在如下的意义上和热算子

$$\Box\equiv\frac{\partial}{\partial t}-\Delta$$

是共轭的。即如果度规 $g_{\mu\nu}(X,t)$ 是 Ricci 流在 $t\in[t_i,t_*]$ 的解，同时 $v(X,t)$ 和 $w(X,t)$ 也是 $t\in[t_i,t_*]$ 的时空

M^4 上函数，那么有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{M^4} dV(X)\, vw &= \int dV(X)\,\left(w\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial w}{\partial t}-Rvw\right)\\ &= \int dV(X)\,\left\{[w\,(\Box v)+w\,(\varDelta v)]+[-v\,(\Box^* w)-v\,(\varDelta w)+vwR]-Rvw\right\}\\ &= \int_{M^4} dV(X)\,[w\,(\Box v)-v\,(\Box^* w)]\end{aligned}$$

容易看到当 $v=1$ 的时候，也也得到了 w 的共轭热方程。

这样我们就得到了保持约束 (27) 下的密度黎曼几何 (甚至是赝黎曼的) 的流方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = -2\left(R_{\mu\nu}-\nabla_\mu\nabla_\nu \log u\right)\\ \frac{\partial u}{\partial \tau} = (\varDelta - R)\,u \\ \frac{d\tau}{dt} = -1\end{cases} \tag{44}$$

我们可以直观的这样理解。第一个 Ricci-DeTurck 流方程描写流形的“横向”形状变化，由于 u 密度可以看作流形的局部体积比 (31)，所以第二个共轭热方程描写流形“纵向”体变化。而约束 (27) 或 (40) 可以解释为实验室系体积元的刚性，因为实验室体积元就是 $d^4x = u(X)dV(X)$ 是一个 Ricci 流意义上的不变体积元，即虽然时空由于在 Ricci-DeTurck 流下不等距，时空体积元量子涨落后是变化的，但实验室系体积元永远保持刚性不变，这和我们在实验室中的直观预设是一致的。从重整化的角度看，这个约束相当于定义和固定了一个重整化点。从约束 (40) 也能看到，由于 u 密度其实起到了抵消体积在 t 方向的正向流的作用，所以 u 的流其实是一个逆向 $d\tau = -dt$ 的不可逆的流。方程组 (44) 将 (赝) 黎曼几何 $(M, g(t))$ 的演化推广成了密度 (赝) 黎曼几何 $(M, g(t), u(\tau))$ 的演化。Perelman 发现了这组方程组的变分结构，即方程组可以作为一些单调熵泛函的梯度流，为分析这个耦合系统的行为提供了有利的工具。与 u 密度的共轭热方程耦合之后，Ricci 流单独演化时可能发生的某些局部奇异性在某种意义上被削弱了（虽然没有被完全消除），这导致 Ricci 流重要的局部非塌缩定理（见 VI G）。

D. 共轭热方程的热核和 u 密度 (Ricci 流演化的一般时空几何背景)

前面定义的 u 密度和热核 K 只是在固定时空背景中给出的，类似于谱几何（spectral geometry）中的热核，热核只是反映了几何的信息但并不对几何有反作用。这一节中，这些量需要通过和时空的 Ricci 流耦合的共轭热方程（44）的热核方法来更严格的定义，这种耦合也带来了标架场的热核对（由标架场度量的）时空的反作用。

因为（44）的共轭热方程是一个类似虚原时的 Schrödinger 方程或热方程的线性实方程，通过分离变量方法，很容易得到满足初始条件

$$\lim_{\tau\to 0} K\left(X_\tau, X'_0, \tau\right) = u_0(X')\delta^{(D)}(X-X') \tag{45}$$

（注意本节中所有 X 的下标 0 都表示 $\tau \to 0$ 而不是 X 的时间分量）的共轭热方程

$$\frac{\partial}{\partial \tau} K\left(X_\tau, X'_0, \tau\right) = \left(\varDelta_X - R\right) K\left(X_\tau, X'_0, \tau\right)$$

的解，跃迁振幅 $K(X_\tau, X'_0, \tau) = \langle X_\tau | e^{-\tau(-\varDelta+R)} | X'_0\rangle$ 是一个热核函数（或者密度矩阵）

$$K(X_\tau, X'_0, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\zeta_i \tau}\psi_i^*(X_\tau)\psi_i(X'_0) \tag{46}$$

其中 $*$ 表示复共轭，$\psi_i(X_\tau)$ 是在 τ 尺度的算子 $-\Delta_{X_\tau}+R_\tau$ 的的本征函数

$$\left(-\Delta_{X_\tau}+R_\tau\right)\psi_i(X_\tau)=\zeta_i\psi_i(X_\tau) \tag{47}$$

$\zeta_i=\{\zeta_0<\zeta_1<\zeta_2<...\}$ 是算子 $-\Delta_X+R$ 的本征值。$\psi_i(X)$ 描写了时空局部标架场 X 在经典平均值 $\langle X\rangle$ 附近的量子本征涨落模式，描写了时空微观量子自由度的本征波函数。在惯性坐标 X 下 $\psi_i(X)$ 是纯态的波函数，在一般坐标系下 $\psi_i(X)$ 一般是非幺正和混态的了，另外因子 $e^{-\zeta_i\tau}$ 也描写了本征模式 $\psi_i(X)$ 的系综密度，所以一般来说这个热核 $K(X,X',\tau)$ 是一个混态的密度。$u_0(X)$ 可以看作是波函数 $\psi_i(X)$ 和 $\psi_i(X')$ 在一般坐标系 X,X' 之间的非平凡的交叠或者内积 $u_0=\int dV(X'_0)\langle X_0|X'_0\rangle$。在一般弯曲几何坐标系 X 和 X' 中本征波函数 $\psi_i(X_\tau)$ 和 $\psi_i(X'_0)$ 一般不再严格正交了，因此 $u_0(X)$ 一般不等于 1。只有当 X,X' 都是在平坦背景下，波函数之间才是正交的，即 $\langle X_0|X'_0\rangle=\delta^{(D)}(X_0-X'_0)$，才有 $u_0(X)=1$，给出标准初始热核 $\delta^{(D)}(X-X')$。非平凡的 u_0 是对平坦初始热核的修正。

类似 (35)，通过除以要比较的标准 $K\left(X'_0,x\right)$ 来归一化，可以定义 $|X_\tau\rangle$ 相对于 $|X'_0\rangle$ 的相对振幅

$$\tilde{K}\left(X_\tau|X'_0\right)\equiv\frac{K\left(X_\tau,X'_0,\tau\right)}{K\left(X'_0,x\right)} \tag{48}$$

由于 $K\left(X'_0,x\right)\equiv u_0(X')\delta^{(D)}(X'-x)$ 是与 τ 无关的初始条件，因此相对振幅自然也满足关于 X_τ 的共轭热方程 $\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{K}\left(X_\tau|X'_0\right)=\left(\Delta_{X_\tau}-R_\tau\right)\tilde{K}\left(X_\tau|X'_0\right)$。

从 (46) 可以看出热核依然满足前一节（IV B）固定背景下的交换关系

$$K(X_\tau,X'_0,\tau)=K^*(X'_0,X_\tau,\tau) \tag{49}$$

密度矩阵是厄密的，有实本征值，这完全是由算子 $-\Delta+R$ 是厄密算子，本征值 ζ_i 是实数决定的。因此相对振幅也有类似的量子振幅的“贝叶斯公式”

$$\tilde{K}\left(X_\tau|X'_0\right)=\frac{\tilde{K}^*\left(X'_0|X_\tau\right)K^*\left(X_\tau,x\right)}{K\left(X'_0,x\right)}$$

另外，热核也满足重要的半群关系 (34)

$$\int dV(X'_{\tau'})\left[K(X_{\tau'+\tau},X'_{\tau'},\tau)K\left(X'_{\tau'},X_0,\tau'\right)\right]=K(X_{\tau+\tau'},X_0,\tau+\tau') \tag{50}$$

但这一节所讨论的热核 $K(X_\tau,X'_0,\tau)$ 和前一节（IV B）的热核 $K(X,X')$ 也有很多不同：固定时空几何背景上的热核背景几何 X',X 是固定的，带有相同的 τ 参数，而现在考虑到联立方程组 (44) 中的共轭热方程的热核 K 在沿着 $\Delta\tau$ 逆向演化，而背景几何 X 也在随 $\Delta t=-\Delta\tau$ 的 Ricci 流正向演化，演化始末坐标不再带有相同的 τ。为了区分开，我们不仅在热核中标注出始末坐标 X 和 X' 还标注出两者的尺度差 τ，写成 $K(X_\tau,X'_0,\tau)$，作为通常固定几何背景下的热核 $K(X,X')$ 的推广，热核不仅随共轭热方程在演化，其演化也反作用在背景几何上带来几何的 Ricci 流，这是这个理论和通常固定几何背景的热核理论的不同之处。有时为了将联立方程组求解的问题简化，我们有时也会通过近似固定背景的谱几何来做近似计算，比如在（VII D）中在近乎热平衡的固定背景时空构型上计算几何的熵。

我们知道，固定几何背景的热核 $K(X,X')$ 在同一点 X 有小 τ 参数展开

$$K(X,X)=\frac{1}{(4\pi\tau)^{D/2}}\left(1+a_1(X)\tau+a_2(X)\tau^2+O(\tau^3)\right),\quad(\tau\to 0)$$

展开系数 $a_i(X)$“探测”了背景 X 的几何信息（如体积、标量曲率等），这就是经典的所谓“听出鼓的几何”的数学

问题。在不同点 $K(X,X')$ 可以推广成如下近似形式

$$K(X,X') = \frac{1}{(4\pi\tau)^{D/2}} e^{-\frac{d^2(X,X')}{4\tau}} u(X,X',\tau)$$
$$= \frac{1}{(4\pi\tau)^{D/2}} e^{-\frac{d^2(X,X')}{4\tau}} \left(1 + a_1(X,X')\tau + a_2(X,X')\tau^2 + O(\tau^3)\right), \quad (\tau \to 0) \tag{51}$$

其中 $d^2(X,X')$ 是连接 X' 和 X 两点的测地线距离二次型，后面的 $u(X,X')$ 作为对高斯部分的修正描写了非平坦的背景几何的信息。当背景几何不是固定的，τ 参数可以被解释成 Ricci 流参数，几何随 $\Delta t = -\Delta\tau$ 演化，Perelman 推广了这个测地距离 $d^2(X,X')$，他称为约化距离 $l(X_\tau, X'_0, \tau)$

$$l(X_\tau, X'_0, \tau) = \inf_{X\in\Gamma} \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \int_0^\tau d\tau' \sqrt{\tau'} \left(\left| \frac{dX}{d\tau'} \right|^2_{g(\tau')} + R(X(\tau')) \right)$$

其中 $\inf_{X\in\Gamma}$ 是取所有连接开始点 $X'_{\tau=0}$ 和终点 X_τ 的所有路径 Γ 中最短的 (测地) 距离，从而构造了这个热核的下界解

$$v(X_\tau) = \frac{1}{\lambda(4\pi\tau)^{D/2}} \int dV(X'_0)\, e^{-l(X_\tau, X'_0,\tau)} \le u(X_\tau) \equiv \frac{1}{\lambda(4\pi\tau)^{D/2}} e^{-f(X,\tau)}$$

这个等号在流极限下取得，这是一种对 u 密度下界的估计。相应的也有对 u 密度的上界估计。

两点间约化距离可以看作是一种对热核的估计，热核原则上也可以通过求解方程组 (44) 来计算，这样也可以直接借助热核来给出 u 密度。热核是比 u 密度更基本的概念，u 密度可以通过热核来的到。根据初始热核的定义 (45)，一般密度分布 $u(X_\tau)$ 就可以看作从初始均匀密度 1 演化而来

$$u(X_\tau) = \int dV(X'_0)\, [K(X_\tau, X'_0, \tau) \cdot 1] \le 1 \tag{52}$$

当 $\tau \to 0$ 时，$K(X_\tau, X'_0, \tau) \to u_0(X'_0)\delta^{(D)}(X_\tau - X'_0)$，回到 $u(X_\tau) \to u_0(X_0)$。很容易看出来这样给出的 u 密度 (52) 满足共轭热方程 (43)。注意到 $X'_0 \sim x$，$K(X_\tau, X'_0, \tau) \sim \frac{1}{dV_\tau(X)}$，这个公式 (52) 其实就是（31），表示的是 $dV_\tau(X)$ 和实验室标准体积 d^4x 的比值。由于演化的单调性（V E）可以看到一个初始已经归一化的密度在演化中密度将永远不会高于初始密度 1，$u(X_\tau) \le 1$。这个公式也可以看作将 u 密度看作是热核对初始坐标部分求迹（partially trace over initial X_0）

$$u(X_\tau) = \mathrm{Tr}_{X_0} K(X_\tau, X'_0, \tau)$$

如果将 $u(X_\tau)$ 归一化为 $\lambda \int dV(X_\tau)\, u(X_\tau) = 1$，那么带入 (52) 就有 $\lambda \int dV(X'_0) \int dV(X_\tau)\, K(X_\tau, X'_0, \tau) = 1$，再考虑到实验坐标的体积归一化 $\lambda \int dV(X'_0) = \lambda \int d^4x = 1$，所以热核还满足

$$\int dV(X_\tau)\, K(X_\tau, X'_0, \tau) = 1 \quad 或 \quad \mathrm{Tr}_{X_\tau} K(X_\tau, X'_0, \tau) = 1 \tag{53}$$

所以我们观察到 (52) 和 (53)，这不违反变量交换对称性 (49)，只是对热核 $K(X_\tau, X'_0, \tau)$ 的不同 τ 尺度的坐标的积分结果不同。其原因在于不同尺度的体积元是不同的 $dV(X_0) \ne dV(X_\tau)$，(52) 和 (53) 的不同反映了 $dV(X_\tau)$ 和 $u(X_\tau)$ 演化的单调性和不可逆性。

特别的，如果初始密度也是一个热核 (45)，$K(X'_{\tau'}, X_0, \tau')$，由热核积分的半群关系 (50)，(52) 就变成 u 的基本解

$$u_{基本解}(X_\tau) = \int dV(X'_{\tau'})\, [K(X_\tau, X'_{\tau'}, \tau - \tau') K(X'_{\tau'}, X_0, \tau')] = K(X_\tau, X_0, \tau) \tag{54}$$

所以我们看到两点相同 (虽然尺度不同) 的热核 $K(X_\tau, X_0, \tau)$ 其实就是该点 u 密度的基本解，即 $u_{基本解}(X_\tau)$ 是标架场跃迁振幅或热核 $K(\hat{X}_\tau, X_0, \tau)$ 的对角元。如果把 (52) 中的 X'_0 看作 x，根据一般解和基本解的关系，就得到基本解 $u_{基本解}(X_\tau)$ (30) 其实就是热核 $K(X_\tau, x)$。

如果将相对振幅 $\tilde{K}\left(X_\tau|X_0'\right)$ (48) 的分子和分母都作相同的 X_0' 体积积分，并利用 (52) 和 (45)，就得到

$$\tilde{K}\left(X_\tau|X_0'\right) \doteq \frac{\int dV(X_0')\, K\left(X_\tau, X_0', \tau\right)}{\int dV(X_0')\, K\left(X_0', x\right)} = \frac{\int dV(X_0')\, K\left(X_\tau, X_0', \tau\right)}{\int dV(X_0')\, u\left(X_0'\right) \delta^{(D)}(X_0' - x)} = \frac{u(X_\tau)}{u_0(X_0')} = \tilde{u}\left(X_\tau|X_0'\right)$$

反映了 $u(X_\tau)$ 密度和初始标准密度 $u_0(X_0')$ 之间的相对密度。由于 $u(X_0')$ 与 τ 无关，相对密度 $\tilde{u}\left(X_\tau|X_0'\right)$ 也满足关于 X_τ 的共轭热方程，$\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{u}\left(X_\tau|X_0'\right) = \left(\varDelta_{X_\tau} - R_\tau\right)\tilde{u}\left(X_\tau|X_0'\right)$。因此相对密度 $\tilde{u}\left(X_\tau|X_0'\right)$ 和相对振幅 $\tilde{K}\left(X_\tau|X_0'\right)$ 在局部有相似的物理意义。

在 $\tau \to 0$ 的极限下，利用 (46)

$$\lim_{\tau\to 0} K(X_\tau, X_0', \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^*(X_0)\psi_i(X_0') = u_0(X)\delta^{(D)}(X - X')$$

由于一般弯曲坐标系中算子的本征量子态之间并不幺正等价，因此在一般坐标系中内积 u_0 一般并不为 1，而是不同坐标系标架场之间的相对密度或体积比（Jacobian）。在通常平坦惯性系中的本征函数 $\psi_i(X)$ 满足标准量子态的正交性和幺正性，$\psi_i(X)$ 可以看作是标准的量子纯态的波函数，$\psi_i^*(X)\psi_i(X')$ 贡献纯态的 (幺正) 概率密度，$\lim_{\tau\to 0} K(X_\tau, X_0', \tau) \overset{\text{平坦}}{=} \delta^{(D)}(X - X')$。

当 X 或者 X' 是弯曲时空或者非惯性系坐标的时候，不同点的 $\psi_i(X)$ 和 $\psi_i(X')$ 之间一般是有交叠的，并不幺正等价。比如 X' 是平坦时空坐标，X 是加速系坐标或者黑洞 Schwarzschild 上的坐标的时候，两个波函数之间有交叠和非平凡内积，正是两个不同坐标系量子态之间的非平凡内积导致了半经典 $(\tau \to 0)$ 的 Unruh 效应或者 Hawking 辐射等非幺正热效应。在半经典 $\tau \to 0$ 下，如果波函数的交叠比 $e^{-\tau\zeta_i}$ 在 $\tau \to 0$ 时贡献的展宽更重要的时候，我们也通过半经典的计算波函数的交叠来近似计算 u 密度。比如后面计算经典黑洞的系统中 (VII D)，如果几何涨落模式的最低本征值 ζ_0 相比几何的特征尺度 $X_{\text{特征}}^{-2}$ 要小很多的时候，即 $\zeta_0 \ll X_{\text{特征}}^{-2}$，我们可以把坐标重标度变成 $X \to rX$，则本征方程 (47) 变成 $\left(-\varDelta_{rX} + R_{rX}\right)\psi_0(rX) = r^2\zeta_0\psi_0(rX)$，当 $rX \sim O(X_c)$，则 $r^2\zeta_0 \sim X_{\text{特征}}^2\zeta_0 \ll 1$，因此最低本征函数 $\psi_0(X_\tau)$ 就近似满足弯曲时空背景上标量场方程 $\left(-\varDelta + R\right)_\tau \psi_0(X_\tau) \approx 0$ 和 $\psi_0(X_0)$ 就满足实验室系平坦背景上的标量场方程 $\varDelta_0\psi_0(X_0) \approx 0$。考虑到其他 $\zeta_i > \zeta_0 \sim 0$ 的因子 $e^{-\zeta_i\tau} \ll 1$，所以这个弯曲时空中的标量场方程的解 $\psi_0(X)$ 就给出 $u(X)$ 密度的近似计算

$$u(X) \overset{\zeta_0 \ll X_{\text{特征}}^{-2}}{\approx} u_0(X) \approx \left|\psi_0(X)\right|^2 \tag{55}$$

简而言之，这个 4-时空的标量场方程的解和弯曲时空热力学的关系，可以看作是 3-空间熟知结论的类比：（3-空间 Laplacian）调和函数一定程度上可以用来近似给出热方程的热稳态近极限解。

共轭热方程的流极限方程 $\frac{\partial u}{\partial\tau} = 0$ 就可以看作是在半经典极限下（$\zeta_0 \ll X_{\text{特征}}^{-2}$ 本征值可以忽略）一般弯曲背景上的标量场方程，Klein-Gordon 方程，$(-\Delta + R)u_0 \approx 0$，当然流极限方程严格的是一个 $\tau \to 0$ 的收缩梯度 Ricci 孤立子 (GSRS) 方程，其 u 密度解对应的 Shannon 熵取极值，相当于处 u 密度描写的标架场系综的"热平衡态"。这就是为什么 Schwarzschild 黑洞或者 Rindler 时空等几何背景上的 Klein-Gordon 方程的解与某种"热平衡态"（分别是 Hawking 温度效应和 Unruh 温度效应）有深刻联系的原因（一个定性的类比是，这类似于三维空间中的 Laplacian 方程其实就是热方程的热稳态极限，有最大熵）。从 u 密度在（IV B）中给出的标架场密度矩阵的解释，我们可以看到 Hawking 温度或 Unruh 温度背后处在"热平衡"的时空微观自由度其实就是时空标架场。

在 ζ_0 和其他本征值不能忽略时，由于时空的 Ricci 流会导致偏离经典时空构型的其他量子涨落构型贡献到 (46)，所以这构成了很多可能时空构型的纯态系综 $\{\psi_i(X),\ i = 0, 1, 2, ...\}$，而 $e^{-\zeta_i\tau}$ 项就贡献量子态 $\psi_i(X)$ 的系综概率（见 VII B）。密度的归一化条件 (27) 就是系综密度 $e^{-\zeta_i\tau}$ 的归一化条件。

热核 $K(X, X', \tau)$ 其实就是一个密度矩阵的非对角元，由于这个密度矩阵在有限 τ 的时候，纯态 ψ_i 的系综密度 $e^{-\zeta_i\tau}$ 是非零的，一般来说热核 $K(X, X', \tau)$ 是一个混态的密度矩阵。所以一般来说，这里的 τ 逆向流以及

一般的 Ricci 流，是会导致从纯态到混合态的非幺正演化。Ricci 流或者 $e^{-\zeta_i\tau}$ 项，有效地在有限 τ 时，把热核 $K(X,X',\tau)$ 展宽，即使是惯性系或平坦时空的初始密度 $u_0(X)\delta^{(D)}(X-X')\overset{\text{平坦}}{=}\delta^{(D)}(X-X')$ 也会被 Ricci 流展宽到有限宽度，成为一个高斯形式 (32)（高斯近似下）。

既然一般这个热核描写了混态系综，那么很自然就有系综的熵的概念。这个几何上的热核或者混态的密度矩阵 $K(X',X,\tau)$ 提供了一种计算时空几何上的本征涨落系综的熵的方法，通过计数算子所有本征值 ζ_i 或者本征态 ψ_i 的数目，借助 zeta 正规化方法，低于 ζ 的本征值数目可以由计数函数 $\mathbb{N}(\zeta)$ 给出，

$$\mathbb{N}(\zeta)\equiv\mathbb{N}(i:\zeta_i\leq\zeta)=\sum_{\zeta_i<\zeta}1$$

本征值上限趋于无穷的 $\zeta\to\infty$ 极限等价于计算 $\tau\to 0$ 的极限（保持 $\tau\zeta_i\to 0$），因此这时 u 密度就计数了近乎所有本征值的数目

$$\begin{aligned}\lim_{\zeta\to\infty}\mathbb{N}(\zeta)=\sum_{\zeta_i<\zeta\to\infty}1=\lim_{\tau\to 0}\sum_i^{\infty}e^{-\tau\zeta_i}&=\lim_{\tau\to 0}\mathrm{Tr}e^{-\tau(-\Delta+R)}=\lim_{\tau\to 0}\mathrm{Tr}K(X_\tau,X_0',\tau)\\&=\lim_{\tau\to 0}\int dV(X_0)\,K(X_\tau,X_0,\tau)=\lim_{\tau\to 0}u_\tau\end{aligned}\tag{56}$$

其中 Tr 表示对所有量子态求和，等价于将热核的对角元求迹或体积积分。后文 (VII D) 我们正是通过这个思路来计算（低温大质量）黑洞背景的熵：在黑洞几何背景上求解经典标量场 $(-\Delta+R)u_0\approx 0$ 的零模解，给出小 τ（半经典低温极限）下的近乎热平衡的 u 密度，这个密度近似的给出了热平衡下所有本征值的数目，进而给出几何的热平衡熵 $\mathcal{S}=\lim_{\zeta\to\infty}\log\mathbb{N}(\zeta)$。这个 $\mathrm{Tr}K(X,X',\tau)=\sum_i e^{-\tau\zeta_i}$ 其实不是别的，正是物理上的配分函数 $Z(\tau)$，它直接编码了算子的谱信息，其中 τ 扮演了类似温度的角色。低温极限下本征态的数目可用零模数目（热核的维数 $\dim\ker(-\mathit{\Delta}+R)$）近似，即

$$\lim_{\zeta\to\infty}\mathbb{N}(\zeta)=\lim_{\tau\to 0}Z(\tau)=\dim\ker(-\mathit{\Delta}+R)$$

因此从统计物理的角度看，这个计数函数 $\mathbb{N}(\zeta)$ 和熵 $\mathcal{S}$ 和热核 $K(X_\tau,X_0,\tau)$ 的联系在统计物理上似乎就不难理解了。

总结起来，我们看到一般坐标系 X,X' 下的热核 $K(X,X',\tau)$ 一般都是非幺正或者混态的密度，这种非幺正性（a）来自一般经典坐标系 X 和 X' 上的波函数 $\psi(X)$ 和 $\psi(X')$ 之间的交叠（给出比如 Unruh 效应或者 Hawking 辐射等非幺正的现象），（b）也来自有效 $\tau\neq 0$ 时流因子 $e^{-\zeta_i\tau}$ 的效应。这种由于经典坐标变换产生的波函数交叠和 Ricci 流产生的坐标的展宽产生的交叠在物理上是完全等效无法区分的。过去在经典弯曲时空和经典坐标变换下的量子场论中我们已经发现了（a）的波函数交叠和展宽效应，而（b）的效应是在时空也带有量子涨落的时候的一种额外的展宽效应，这个展宽效应将在宇宙尺度的观测中占主导地位，是本文主要阐述的对象之一。在量子参考系的框架中，量子引力的中心问题就是通过研究量子标架场来研究量子时空本身，和所谓的“从鼓声听出鼓的形状”的数学问题类似，而算子 $-\mathit{\Delta}+R$ 在弯曲时空局部的谱 $\{\zeta_i\}$ 或者系综 $\{\psi_i(X)\}$（听到的鼓声），就反映了时空局部的几何性质（鼓的形状）。比如局部时空的体积比 (31)，曲率 (77)，时空微观量子自由度的熵 (72)，加速系的加速度 (66) 等等都可以完全从热核中得到。所以计算这个热核 $K(X,X',\tau)$ 在这个量子时空理论中具有中心的地位。

V. 量子时空的一般坐标变换

这一章我们来看，要得到一个一般的量子时空坐标系上的量子理论，一个最首要的问题：如何在量子时空中做一般坐标变换？在半经典近似 (III D) 中，忽略时空的量子涨落，我们可以将时空坐标当作通常的数 $\langle X\rangle$，从

实验室系 x 像通常的坐标变换一样变到半经典的一般固定弯曲时空坐标系，$x \to \langle X\rangle$。而在超越半经典近似下 (III C)，量子标架场 X 被提升成为一种带有量子涨落的量子场构型，于是一般坐标变换成为一种由 NLSM 描写的量子场论映射 $X(x): x \to X$。在数学的意义上，一个被研究系统 (比如场 ϕ) 所参照的局部坐标系 X 的坐标变换就是从一套标架场构型 $|X_0, X_1, X_2, X_3\rangle$ 变换成另外一个标架场构型 $|\hat{X}_0, \hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3\rangle$ 的过程。不同坐标系标架除了有不同的经典度量和坐标中心值以外，还有不同的本征谱 (47) 和 u 密度，在高斯近似下，带来不同的坐标展宽和度量的重整化修正；从路径积分量子化的角度说，从实验室系 x 到量子标架场 X 的映射需要路径积分掉中间所有可能的量子标架场构型。更一般的，从一个坐标系标架场 X 构型通过一般坐标变换到另一个坐标系标架场 $\hat{X}$ 构型，需要通过路径积分或泛函积分积掉所有中间可能的量子标架场构型。

物质粒子相对于不动的坐标系的运动也可以等价的看作是物质粒子不动而坐标系在运动，或者说只有物质粒子和坐标系之间的相对运动才是物理的，这是经典层面的运动的相对性原理。我们现在的问题是，这个相对性原理在量子层面是否还是对的？在量子的层面，物质粒子的从一点运动到另一点的所有信息完全由跃迁振幅来给出。在我们的标架场的框架中，坐标变换的信息也可以通过计算两个坐标系标架场之间的跃迁振幅给出，那么他们是否是等价的？如果他们是等价的，那么由于标架场和物质粒子的质量可能完全不同，那么这就需要这个跃迁振幅的质量无关性。

作为量子一般坐标变换的基础，以及量子等效原理的一个具体体现，我先来看物质粒子“测地”跃迁振幅 (geodesic transition amplitude) 的质量无关性，及其带来的物质粒子和标架场粒子“测地”跃迁的等价性。

A. 量子测地振幅的质量无关性和量子等效原理

如果坐标系（标架场 X）不动（比如相对于某“绝对”实验室系），考虑一个物质 (标量) 粒子 ϕ 在这个坐标系下除引力以外没有其他相互作用，即 ϕ 相对于坐标系标架场 X 是“自由”的，或者“测地”（geodesic）运动的。我们在这里只考虑没有内部自由度，仅携带质量 m 的标量粒子，我们知道有内部自由度的粒子经典上并不严格像经典等效原理说的那样走测地线轨道。现在在量子层面，它从 4-时空点 X 点跃迁到另一个 4-时空点 $\hat{X}$ 点的量子期待值可以通过传播子 $\mathscr{K}(\hat{X}, X, s)$ 给出，

$$\phi\left(\hat{X}_s\right) = \int dV(X_0)\, \mathscr{K}\left(\hat{X}_s, X_0, s\right) \phi\left(X_0\right) \tag{57}$$

所有粒子传播的量子特性都在传播子中，它是经典测地轨道概念的自然推广。在经典的情况下，由于经典等效原理，这个粒子测地运动的测地轨道方程（测地线方程）只依赖于背景时空 X，而与其自身的性质（比如惯性质量）无关。那么为什么量子层面的粒子的传播，比如通常标准的平坦时空上的 Feynmann 传播子（X 到 $\hat{X}$ 的量子跃迁振幅）

$$\mathscr{K}_{\text{惯性系}}\left(\hat{X}, X\right) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip\cdot(\hat{X}-X)}$$

是依赖粒子质量（动量表象中传播子的奇点）的？所有量子特性都在传播子中，如果 X 到 $\hat{X}$ 是同一点，则给出该点的量子二阶矩涨落或展宽也是很质量依赖的。

这个质量相关性的冲突的根源来自于其实这个标准的 Feynmann 传播子其实只限于 X 和 $\hat{X}$ 都只是惯性系坐标才是成立的，对一般坐标系并不成立。并且我们注意到，当 X 和 $\hat{X}$ 是平坦的惯性系时，存在一个整体外部绝对原时参数 $s \in [0, \infty)$（比如一种取法是 s 取这个惯性系时间间隔 $\hat{X}_0 - X_0$）。在这个外部参数 s 变化下，

惯性系从 $X_\mu(s=0)$ 变到 $\hat{X}_\nu(s)$，Feynmann 传播子 $\mathscr{K}_{\text{惯性系}}\left(\hat{X},X\right)$ 其实已经积掉了这个外部原时参数，

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_{\text{惯性系}}\left(\hat{X},X\right) &= \int_0^\infty ds \mathscr{K}_{\text{惯性系}}\left(\hat{X},X,s\right) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(\hat{X}-X)} \int_0^\infty ds e^{-is(p^2-m^2)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2} e^{-ip\cdot(\hat{X}-X)}\end{aligned} \tag{58}$$

其中在有限 s 的传播子 $\mathscr{K}_{\text{惯性系}}\left(\hat{X},X,s\right)$ 要把和原时共轭的哈密顿量 $H=p^2-m^2$ 的项包含进去（全局哈密顿能量不一定是局部 3-空间坐标片上的能量 $H(M^3)$，而是 4-时空所嵌入的高维外部和 s 共轭的"能量"$H(M^4)$，这取决于外部原时 s 和惯性系时间 $X_0,\hat{X}_0$ 之间关系的规范选取）。我们得到一个随原时 s 演化的高斯型自由传播子（和质量 m 有关）

$$\mathscr{K}_{\text{惯性系}}\left(\hat{X},X,s\right) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(\hat{X}-X)} e^{-is(p^2-m^2)} = \frac{1}{(4\pi is)^2} e^{-\frac{(\hat{X}-X)^2}{4is}+ism^2}$$

质量 m 决定了这个惯性系传播子在原时 s 比较大的时候渐近的振荡快慢，给出了标准量子力学给出的粒子时空坐标展宽和质量的反比关系 $\delta s\sim 1/m^2$。这里我们看到的一个自由传播振幅对质量的依赖性，在一般重力场中的 Schrödinger 方程的哈密顿量还要引入引力势能的效应，给出的自由下落的粒子传播子一般也是依赖质量的。

要像经典测地线轨道（即 $\delta H=\delta E_{\text{动能}}+\delta V=0$）那样和质量无关，惯性质量（$\delta E_{\text{动能}}\propto m_{\text{惯性}}$）和引力质量（$\delta V\propto m_{\text{引力}}$）相等的经典条件就不够了，因为在量子层面 $\delta H\neq 0$，因此在量子层面涨落 $\delta H\propto m$ 是和质量依赖的。量子传播子 $\mathscr{K}\left(\hat{X},X\right)$ 作为经典测地线轨道的量子推广，已经将连接 X 到 $\hat{X}$ 所有的经典轨道都求和（量子叠加）了，$\mathscr{K}\left(\hat{X},X,s\right)=\langle\hat{X}|e^{-isH}|X\rangle$ 要得到传播子和质量无关，要像经典轨道方程 $\delta H=0$ 那样能够把里面的质量 m 都无关掉，需要的条件就是所有不同轨道上的哈密顿能量都有 $H=0$。这个条件不仅是可以做到的，而且是自然的。

我们看到，两点传播子和质量 m 的无关性发生在这样的情况下，即一个经典的、绝对的、外部的、惯性系的原时参数 s (这时 $s\neq\hat{X}_0-X_0$) 是非物理的，因为我们工作在一个内蕴的 4-时空 $\hat{X},X\in M^4$ 基础上，而不存在外部 $M^5=M^4\times s$ 和全局参数 s，同时在量子层面没有经典测地轨道概念之后，这个原时参数也是无法严格做到。在一般非惯性局部坐标片 X 和 $\hat{X}$（传播子始末坐标）中不存在一个全局外部原时参数 s，也不存在一个全局外部哈密顿能量，在内蕴的一般非惯性局部坐标系 X 和 $\hat{X}$ 的观察者自然看不到质量决定的传播子随外部 s 的振荡。物理上我们也知道，如果将 s 解释成某种外部原时，因为"比对原时时钟 s"受到光速不变的影响，不同局部坐标片上或不同的坐标位势上的原时时钟走的快慢并不相同，不同坐标片之间并没有全局统一的原时参数 s。因此一般来说，量子的、相对的、非惯性内蕴坐标片中，不管是自由的粒子还是在重力势能中的粒子，粒子的哈密顿能量一般都是零，称为哈密顿约束，

$$H(M^4)=0$$

这其实是量子层面一般协变的坐标系中没有外部绝对参数时间的必然结果，因为本质上任何含有非零哈密顿能量驱动演化的量子系统都暗含了一个优先的惯性坐标系，或者暗含了一个外部更大的全局空间 $M^5=M^4\times s$。从一开始就抛弃绝对外部时间和惯性系的概念，也就抛弃了 Schrödinger 方程的哈密顿能量驱动演化的图像。这个外部哈密顿约束的条件，只有在选定特定的局部坐标片之后 (选定物理时钟的规范固定之后) 才给出特定的哈密顿能量和质量 (4-动量的奇点 $p^2=m^2$)。因此在彻底放弃全局原时参数 s 或者采用哈密顿约束的时候，一般坐标系传播子就是

$$\mathscr{K}_{\text{惯性系}}\left(\hat{X},X,s\right) \overset{H(M^4)=0}{\longrightarrow} \mathscr{K}\left(\hat{X},X\right) = \int_0^{|p|=k} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(\hat{X}-X)} \overset{k\to\infty}{=} |\det g_{\mu\nu}(X)|^{-1/2}\,\delta^{(4)}(\hat{X}-X) \tag{59}$$

我们看到传播子 $\mathscr{K}\left(\hat{X}, X\right)$ 的 $X, \hat{X}$ 在一般坐标系下就是不依赖粒子质量 m，也不随（一个不存在的假想）演化路径参数 s 改变，只依赖一般背景时空 $X, \hat{X}$ [11]。我们证明哈密顿约束是量子传播子质量无关性的必要条件。这说明，不仅粒子位置的一阶平均值（经典等效原理层面），而且其量子涨落二阶展宽（量子等效原理层面）都不随参数 s 演化。究其原因，我们总能找到一个和粒子相对"静止"的物质坐标系（这里打双引号的"静止"指的是在一阶矩坐标平均值的层面是经典静止的，但在二阶矩还是围绕平均值普适的量子涨落的），其中粒子的哈密顿能量是零，在这个坐标系中由于能看到所有量子坐标系的傅里叶模式，因此看到粒子是既没有时间演化也没有展宽的点粒子（delta 函数），其中虽然粒子的质量和物质坐标系的质量可以不同，但在这个坐标系中粒子和不同质量的物质参考系的量子展宽都是零，因此哈密顿量驱动的动力学二阶涨落展宽部分是可以通过坐标变换消除的，这直观的解释了哈密顿约束带来了量子层面的质量无关性。从相对展宽 (37) 和相对振幅 (35) 的角度也很容易理解，即在相对"静止"量子坐标系中，由于粒子和量子坐标系有普适的二阶涨落，因此这个哈密顿驱动的一阶相对运动而二阶相对展宽都可以通过坐标变换到"静止"坐标系而变成 0，这时传播子成为 delta 函数，哈密顿量退化成哈密顿约束。

这个结果和通常在惯性系中的 Schrödinger 方程的角度给出的结果是完全不同的，Schrödinger 方程中总是有二阶涨落展宽并受到非零哈密顿能量的驱动，一般来说二阶展宽 $\propto \hbar/m$ 和质量有关，即只有质量大的标架场才近似给出经典等效原理的质量无关性，而对于质量小的标架场涨落很大。而我们注意到，这个传播子 (59) 的展宽并不是由哈密顿能量演化带来的，而是由截断能标的粗粒化带来的，在有限截断 $|p| = k$ 的时候和质量无关只与截断有关。当截断 $|p| = k \to \infty$ 的极限下是一个没有展宽的 delta 函数。这种二阶矩展宽只和截断能标有关与其质量无关的现象不仅在标架场的二阶矩展宽计算 (19) 中发生，现在我们看到其实也在一般坐标下的标量物质场中发生，是量子等效原理所要求的质量无关性的体现。而这个由截断带来的有限展宽，也可以通过反常抵消项（见 VI A）让传播子回到局部惯性系的无展宽的 delta 函数结果，这也是量子等效原理另一方面的的体现。

这个传播子与 (外部) 原时 s 参数和静止质量 m 无关的性质也说明了其实没有绝对的 (外部) 坐标来描写粒子的绝对运动，粒子的运动只能借助内部时空坐标 X 的相对运动来描写，粒子的运动只能看作是相对于 (内部) 时空坐标系的运动。在没有外部绝对参数 s 时，传播子中的 delta 函数表示时空点 X 和 $\hat{X}$ 是经典可区分 (没有交叠) 的，即本征值 (47) $\psi(X)$ 和 $\psi(\hat{X})$ 是正交的。一般的可以证明，对于一个一般协变的哈密顿约束的系统，其量子测地跃迁振幅（给出的一阶经典平均值和二阶量子涨落展宽，乃至更高阶的量子涨落）都是和质量无关的。

我们注意到，放弃绝对外部惯性时间 s 的物理实在性，不仅能帮助我们理解一般协变理论的哈密顿约束，也能帮助我们理解为什么量子零点能没有贡献宇宙常数（零点涨落展宽是由哈密顿量控制的动力学展宽，总能通过坐标变换到一个与真空有相同几何展宽的量子坐标系来消除），也能帮助我们理解量子测地振幅的质量无关性，从而与量子的等效原理自洽，是这篇文章的一个主要论点和出发点。这点与目前大多数物理学家的认识不同，目前大多数物理学基于教科书量子理论对粒子自由落体的处理是依赖粒子质量的：因为和质量依赖的下落动能直接和频率频移联系，因此不同质量的下落频移是非普适的，这通常被看作是等效原理在量子层面是破坏的一个简化的论证，是将等效原理推广到量子层面的佯谬。目前认为只有在大量子数极限下才能回到经典等效原理。

将等效原理推广到量子层面有两个佯谬，一个是如上所述，从 Schrödinger 方程的角度看，不同质量有不同的哈密顿能量，不同哈密顿能量驱动着粒子有不同的二阶矩展宽演化，和量子等效原理要求的不仅要有质量无关的一阶矩平均值演化，也要有和质量无关的二阶矩展宽是矛盾的。这个粒子物质波下落的质量依赖性的矛盾的解决是通过考虑到，不管粒子的质量是多少，对于一般坐标系成立的更严格的量子理论来说，其动能和重力势能之和的守恒总哈密顿量是零（哈密顿约束），量子演化振幅（给出的经典平均值和量子涨落）不再跟质量有关了，这是我们上面得到的结论。但这也导致另一个问题：即由于哈密顿量为 0，粒子下落过程中看似没有 Schrödinger 意义上动力学的频率的演化或跃迁，那么相对于地面观察者，加速下落中的频移和展宽是如何产生

的？要解决这个佯谬，我们注意到这个和质量无关的跃迁振幅 (59) 在 delta 函数前面有一个 Jacobian 行列式 $|\det g_{\mu\nu}(X)|^{-1/2}$，即坐标系的测度，粒子下落过程中频率的频移完全来自这个普适的测度因子的改变，即不同坐标片上普适的测度因子的变化导致了不同质量的粒子有普适的频移和展宽，即自由下落的频移可以看作是普适的引力频移，并不是自由下落粒子动能增加带来的非普适的动力学多普勒频移和展宽。因此，我们看到，要解决这两个佯谬，下落粒子/波的频移和展宽应该有两部分来源，一部分来自坐标依赖的、非普适的、质量依赖的哈密顿能量给出的动力学部分，另一部分来自纯几何的普适的部分，不仅有普适的一阶矩频移，还会有普适的二阶矩量子展宽，其中 delta 函数的展宽我们下文会看到虽然不会受到零哈密顿能量的展宽，但会受到截断能标 k，更严格的说是受到共轭热算子驱动的尺度因子 Δt 普适展宽，也会反映在普适的测度变化中（见 V C）。

惯性系中的 Schrödinger 方程变成一般坐标系中得到的 Wheeler-DeWitt 方程，看似是冻结的，但其得到的不变振幅 (invariant amplitude) 的效应都在测度变化里面，所有一般坐标系下的引力效应也都在这个测度变化里面，不同局部坐标系之间的测度变化描写了局部几何最重要的信息，从中我们可以提取出谱线普适频移、展宽、几何局部曲率等信息。换言之，*现在自由下落过程是一个纯粹的坐标变换产生的现象（如同引力现象也仅仅只是一个坐标变换产生的现象），而不再是由哈密顿能量驱动的动力学演化的现象*。只要放弃哈密顿能量驱动的 Schrödinger 方程在一般坐标系中严格有效性，而采用更严格的哈密顿量约束 + 物理时钟 (规范固定) (见公式 8)，再考虑一般坐标变换下坐标系测度和截断的普适改变，就能得到量子层面加速下落粒子的普适频移和展宽。

如果量子层面的相对性原理和等效原理仍然成立，只有粒子 ϕ 和坐标系 X 的相对运动才是物理的，这个坐标系 X 不动而粒子 ϕ 动的过程，在物理上就应该等价于，粒子 ϕ 本身不动，物理坐标系（标架场）X"测地"的以相同的积分核 $K\left(\hat{X},X\right)=\mathscr{K}\left(\hat{X},X\right)$ 跃迁到另外一套坐标系 $\hat{X}$ 的过程。

首先由于密度的归一化定义 (27)，这个 $\left|\det g_{\mu\nu}(\hat{X})\right|^{-1/2}$ 其实就是 $u_0(\hat{X})$。而且，(59) 可以写成更一般的形式，即 Jacobian 也可以换成一般的体积比 $\frac{dV(X)}{dV(\hat{X})}=\frac{u(\hat{X})}{u(X)}=\tilde{u}(\hat{X}|X,\Delta t\to 0)=\tilde{K}(\hat{X}|X,\Delta t\to 0)$，因此

$$\mathscr{K}\left(\hat{X},X\right)=K\left(\hat{X},X,\Delta t\to 0\right)=u_0(\hat{X})\delta^{(4)}(\hat{X}-X)=\frac{dV(X)}{dV(\hat{X})}\delta^{(4)}(\hat{X}-X) \tag{60}$$

$\Delta t\to 0$ 表示热核的始末坐标系 X 和 $\hat{X}$ 的尺度相差非常小的半经典极限下。如果两个坐标系不是平坦的，那么 Jacobian 一般不是 1。注意到，当 X 坐标系看作标准体积的 x，即 $K(X,x)=\delta^{(4)}(X-x)$，也因为 $\frac{dV(X)}{dV(\hat{X})}=\tilde{K}(\hat{X}|X)$，我们看到公式 (60) 其实就是 (35)。并且，当 X 坐标系看作标准体积，即 $u(X)=1$，相对密度 $\tilde{u}(\hat{X}|X,\Delta t\to 0)$ 也回到密度 $u_0(\hat{X})$。

在一般 Δt 时，delta 函数将被 Ricci 流展宽，成为带有一般宽度的高斯热核 (32)，而且这个二阶展宽并不是受到和质量依赖的哈密顿量 $H(M^4)$ 控制的，而是受到和质量无关的算子 (47) 控制，仍然是标架场质量无关的。如同始末点之间的经典测地线只和背景几何有关，与粒子的质量无关，热核 $K\left(\hat{X},X,\Delta t\right)$ 作为经典测地线的量子推广，也只和背景几何有关，与具体标架场粒子的质量无关。在 Δt 比较小的时候热核的展开 (51)，探测了背景时空几何（几何的体积、曲率等)，就是所谓的"听出鼓的形状"的问题。存在这样的联系，背后的基本原理正是量子等效原理。量子等效原理要求 $\mathscr{K}_{\text{惯性系}}$ 中与哈密顿量 p^2-m^2 对应的全局演化原时参数 s 在不同弯曲坐标片中是不存在的，而与算子 $-\Delta+R$ (47) 对应的 Ricci 流参数 t 才是在不同弯曲坐标片中更合适的全局参数。存在联系不同弯曲坐标片的全局重整化参数 t，不是因为存在一个外部的绝对坐标系，而是因为 Ricci 流参数 t 是可以不依赖于全局坐标系的存在性而建立在局部坐标片上的坐标不变量 (标架场的傅里叶模式截断，见 (23))，它不像时间那样受到光速不变的限制而无法全局的"比对时钟"以至无法像牛顿时间那样作为全局参数。换言之，量子等效原理其实要求我们用局部共轭热算子来取代一般坐标系中不再存在的全局哈密顿量算子，作为描写局部标架场或时空（各阶矩）的概念基础，于是标架场的量子测地振幅对哈密顿量算子中的质量的依赖性不复存在了。这是我们和目前大多数量子参考系坐标变换理论重大的出发点的不同。带来的重要后果就是不同于这些文献中量子坐标变换仍然是幺正变换，考虑到坐标变换时 Ricci 流坐标展宽，我们得到的量子坐标变换一般不

再是幺正变换了。

总结起来，一般的物质粒子 ϕ 在不同 4-时空点之间经典测地线方程和标架场的经典测地线方程等同是经典相对性原理和等效原理的要求。*现在推广到量子层面，无内部结构的物质粒子（在无引力之外相互作用时）"测地"的振幅 $\mathscr{K}\left(\hat{X},X\right)$ 和标架场"测地"的振幅 $K\left(\hat{X},X,\Delta t\to 0\right)$ 等价，由于一般坐标不变的哈密顿约束，测地跃迁振幅是和标架粒子的质量无关的。这个等价性实现了物质粒子和标架场粒子所描写的"时空容器"在量子层面的对称性。当 $K\left(\hat{X},X,\Delta t\right)$ 在有限 Δt 时，Ricci 流给出的展宽也是和标架场质量无关的，这正是量子层面的一般相对性原理和量子等效原理的要求。*严格的说，像薛定谔方程那样在粒子的非零哈密顿量中加入引力势的方式来引入引力相互作用，粒子并不是严格"测地"的自由下落的。只有像协变的非线性 σ-模型（哈密顿量为零）那样通过几何度规的方式引入引力相互作用，粒子才是严格自由下落的。这就是为什么 Schrödinger 方程处理粒子在重力中自由下落看似是质量依赖并违反等效原理的根本道理。因此粒子自由下落时严格的说，是没有哈密顿能量控制的展宽，只有 Ricci 流贡献的普适展宽。只有当粒子受到引力之外的相互作用，不完全是自由下落，粒子有相对惯性系的非零哈密顿能量时，才同时有非普适的哈密顿量贡献的动力学展宽和普适的 Ricci 流贡献的展宽两种贡献。标准量子力学给出的和质量依赖的量子二阶矩不确定其实只是整个不确定性中的很特殊的一部分，只因为标准量子理论只在惯性系中成立，在一般坐标系中考虑到粗粒效应中，就有额外的二阶矩不确定性，而且是和质量无关的。物质参考系对时空展宽的度量来自 Ricci 流普适展宽的部分，而不是惯性系中非零哈密顿给出的非普适的部分。这如同我们可以将光谱的宇宙学红移中普适的部分解释成空间本身的膨胀，光谱的普适展宽解释成空间本身膨胀的加速，而对于星系谱线中非普适的部分（远离的红移和靠近的蓝移）解释成星系在膨胀的空间网格上的本动。

B. 量子时空的一般坐标变换：通过热核的积分变换

我们知道双生子佯谬考虑的两个分开后再相遇的时钟比较的问题本质上是两束粒子分开后再相遇的干涉实验问题，干涉实验的相位是历史依赖的，依赖一个和历史或路径相关的不可积相因子。虽然一个经典版本的双生子问题可以在经典相对论的框架内理解，但一个量子版本的双生子问题，即比较两个不同历史但是回到地球同一点的两个量子时钟的比较问题，不仅包括比价两个时钟的一阶中心值，也包括比较两个时钟的二阶展宽，采用通常的经典坐标变换理论将地球系的时钟仅仅变换到另一个坐标系的时钟是不够的，这个问题本质上需要一个像量子干涉实验这样路径或历史依赖的，包含整体不可积效应的一般量子坐标变换理论，一般的，这需要将经典坐标变换理论发展成一个积分变换理论。

到这里，我们看到由于量子的等效原理，即物质粒子的量子"测地"跃迁 $\mathscr{K}\left(\hat{X},X\right)$ 和物质坐标系的量子"测地"跃迁 $K\left(\hat{X},X,\Delta t\to 0\right)$ 等价，物质粒子和物质坐标系之间的相对关系用传播子 $\mathscr{K}\left(\hat{X},X\right)$ 或者热核 $K\left(\hat{X},X,\Delta t\to 0\right)$ 来描写，这个相对关系才是物理的。因此公式 (57)，现在写成

$$\phi\left(X_{(1)}\right)=\int_{M^4}dV(X)\,K\left(X_{(1)},X,\Delta t\right)\phi\left(X\right) \tag{61}$$

这个公式等效的就有了一个量子坐标变换的解释（而不仅是通常 ϕ 场粒子在固定时空中跃迁的标准解释），而且这个量子坐标变换和标架场的质量是无关的。

更具体的说，如果物质粒子 ϕ 从相对于原来的坐标系标架场 X，变换到，相对于另一个坐标系标架场 $X_{(1)}$，在这个变换过程中，一方面要把在 X 系对应的坐标中心值从 $\langle X\rangle$ 代换成相应另一个坐标系的中心值 $\langle X_{(1)}\rangle$（半经典坐标变换部分）；另一方面，这两个不同的标架场还有略微不同的本征谱 (47) 和 u 密度，以及导致的不同的坐标展宽（量子部分）。因此，半经典坐标变换部分，算子的要做相应的变换：$-\Delta_X+R\left(X\right)\to-\Delta_{X_{(1)}}+R\left(X_{(1)}\right)$，相应本征函数 $\psi_i(X)$ 的坐标 X 需要经典的替换成新坐标系中的坐标 $X_{(1)}$；量子部分，当两个不同的坐标系在

尺度上相差一个比较小的 Ricci 流参数 $-\Delta\tau = \Delta t$ 时，本征值 ζ_i 还会生成一个不可逆的热核展宽因子 $e^{\Delta t\zeta_i}$，描写在坐标变换后由于不可避免的坐标粗粒化造成的原坐标细粒信息的丢失，因此我们将热核的原本征函数不变，而目标本征函数做如下替换

$$\psi_i(X) \underset{X\to X_{(1)}}{\overset{\Delta t}{\longrightarrow}} e^{\Delta t\zeta_i}\psi_i\left(X_{(1)}\right)$$

正是由于这个标架场的本征函数的略微差别，使得初始热核 $u_0(X)\delta^{(D)}(X_{(1)}-X)$ 进一步被 Ricci 流展宽或模糊化成了热核 (46)

$$u_0(X)\delta^{(D)}(X_{(1)}-X) = \sum_i \psi_i^*\left(X_{(1)}\right)\psi_i(X) \overset{\Delta t}{\longrightarrow} \sum_i e^{\Delta t\zeta_i}\psi_i^*\left(X_{(1)}\right)\psi_i(X) = K\left(X_{(1)}, X, \Delta t\right)$$

热核就表现得像是从坐标系 X 转变到另一个和它有无穷小谱差别的坐标系 $X_{(1)}$ 的坐标跃迁振幅。如果在经典极限，即如果忽略热核 $K\left(X_{(1)}, X, \Delta t\right)$ 的展宽（一般坐标经典变换带来的和 Ricci 流带来的），那么热核就像是一个 delta 函数 $u_0(X)\delta\left(X_{(1)}, X\right)$，这个积分变换 (61) 就退化成仅仅只是经典坐标中心值的代换。例如经典的从 Minkovski 坐标 X 变成 Rindler 坐标 $X_{(1)} = \frac{1}{a}\sinh(aX)$，这相当于积分核这时只是一个经典的 $\delta\left(X_{(1)} - X\right) = \delta\left(\frac{1}{a}\sinh(aX) - X\right)$ 函数，而 delta 函数前面的 u_0 则给出两个经典坐标系的体积比。

类似的要将 $\phi(X_{(1)})$ 变到其他和它有无穷小谱差别的坐标系 $X_{(2)}$，类似 (61) 也有

$$\begin{aligned}
\phi\left(X_{(2)}\right) &= \int_{M^4_{(1)}} dV(X_{(1)})\,K\left(X_{(2)}, X_{(1)}, \Delta t\right)\langle\phi(X_{(1)})\rangle \\
&= \int_{M^4_{(1)}} dV(X_{(1)}) \int_{M^4} dV(X)\,K\left(X_{(2)}, X_{(1)}, \Delta t\right) K\left(X_{(1)}, X, \Delta t\right)\phi(X)
\end{aligned}$$

递推下去就得到，要从坐标 X 变到第 N 步的一般坐标系 $\hat{X}$ 得到的 $\phi\left(\hat{X}_{(N)}\right)$ 是

$$\begin{aligned}
\phi\left(\hat{X}_{(N)}\right) &= \int_{M^4_{(N-1)}} dV(X_{(N-1)})\,K\left(\hat{X}, X_{(N-1)}, \Delta t\right)\times\cdots \\
&\quad\cdots\times\int_{M^4_{(i)}} dV(X_{(i)})\,K\left(X_{(i+1)}, X_{(i)}, \Delta t\right)\times\cdots \\
&\quad\cdots\times\int_{M^4} dV(X)\,K\left(X_{(1)}, X, \Delta t\right)\phi(X) \\
&= \int_{M^4} dV(X)\left[\lim_{N\to\infty}\left(\lambda^N\prod_{i=1}^N\int_{M^4_{(i)}} dV(X_{(i)})\,K\left(X_{(i+1)}, X_{(i)}, \Delta t\right)\right)\right]\phi(X) \\
&= \int_{M^4} dV(X)\,K\left(\hat{X}, X, t\right)\phi(X) \equiv \int_X^{\hat{X}} \mathscr{D}X e^{-S_X}\phi(X)
\end{aligned} \tag{62}$$

从 ϕ 场综量 X 的时空坐标解释我们可以猜测这个作用量 S_X 应该就是标架场作用量 (15) 的形式。在 (V C) 中我们可以反过来证明，如果其中 S_X 取 NLSM 的作用量 (15) 的形式，这个路径积分给出 $K\left(\hat{X}, X, t\right)$ 就是满足共轭热方程的热核。所以这个公式其实就是一个具体的 (24)。

另外，由于热核 $K\left(\hat{X}, X, t\right)$ 其实也可以看作是一个混态密度矩阵 (46)，所以 (62) 也可以将量子坐标变换 $\phi(X_B) \to \phi(\hat{X}_A)$ 的过程看作是将部分坐标系统求迹掉 (partially trace over initial X_B)

$$\phi(\hat{X}_t) = \mathrm{Tr}_{X_0}\left[K\left(\hat{X}_t, X_0, t\right)\phi(X_0)\right]$$

我们看到计算物理量 ϕ 从时空标架场 X 系变换到 $\hat{X}$ 系的坐标变换的过程，其实就是在中间所有可能的量子坐标系 $M^4 \to M^4_{(1)} \to M^4_{(2)} \to \cdots \to M^4_{(i)} \to \cdots \to M^4_{(N-1)} \to \hat{M}^4$ 中通过相应的密度不断求平均粗粒化的过

程。本质上，这些路径积分的中间所有可能的坐标系时空构型可以通过单一的 Ricci 流 t 参数来标识，即

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{\Delta t\to 0}\left(M^4\xrightarrow{\Delta t}M^4_{(1)}\xrightarrow{\Delta t}M^4_{(2)}\xrightarrow{\Delta t}\cdots\xrightarrow{\Delta t}M^4_{(i)}\xrightarrow{\Delta t}\cdots\xrightarrow{\Delta t}M^4_{(N-1)}\xrightarrow{\Delta t}\hat{M}^4\right):M^4_t \tag{63}$$

因此这个坐标变换的过程就是 Ricci 流不断用相应的密度粗粒化几何和物理量的过程。这里 $K\left(M^4_{(i+1)},M^4_{(i)},\Delta t\right)$ 就像是经历了 dt 的 Ricci 流尺度变化后，流形从 $M^4_{(i)}$ 变化到 $M^4_{(i+1)}$ 的传播子，这个无限小 dt 的流形的传播子就满足非幺正的共轭热方程 (41)，扮演了类似通常传播子满足的幺正的 Schrödinger 方程的角色，只是现在流参数 t 不是 Schrödinger 方程的惯性系原时，而是 Ricci 流参数。

因此要计算物理量 ϕ 在坐标变换下的变化，最重要的是计算标架场密度 u 在坐标变换下的变化。从 (62) 如果我们把 ϕ 换成 u 密度，那么 u 密度的坐标变换可以写成路径积分的形式，

$$u\left(\hat{X}(t')\right)=\int_{X(t)}^{\hat{X}(t')}\mathscr{D}Xe^{-S_X}u\left(X(t)\right)$$

跟 (52) 相比，可以看出，这个路径积分其实就是核函数，

$$K\left(\hat{X}(t'),X(t),t'-t\right)=\int_{X(t)}^{\hat{X}(t')}\mathscr{D}Xe^{-S_X} \tag{64}$$

其中 S_X 就是 NLSM 的作用量 (15) 的形式。

这个热核在 $t'-t\to 0$ 的半经典极限下给出 (60) 和作用量的半经典近似 (17)。从作用量的半经典近似 (17) 可以看到，对标架场 X 做路径积分得到的热核的积分的效果完成了一个从底时空 x 到靶时空 X 的半经典坐标变换，$\phi(x)\to\phi(X)$，即通过热核的积分变换过程的确就是一种坐标变换过程。而且这个路径积分得到的热核是和标架场的质量无关的，只和两种坐标系的测度之比 $|\det g_{\mu\nu}|^{-1/2}$ 有关，见 (60)。*这种质量无关性正是量子等效原理的体现：正是量子等效原理使得通过热核的积分变换仅仅只是做了一个和标架场质量无关的坐标变换，虽然在超越半经典近似的一般量子层面 $t'-t=\Delta t\neq 0$，(60) 中的 delta 函数会被展宽，因此一般来说这个坐标变换在量子层面还依赖于两个坐标系的尺度差 $t'-t=\Delta t$，但还是和标架场的质量无关的。*

若坐标系在粗粒化的 Ricci 流过程中不遇到奇异性，即存在久期解 (long flow-time solution) $t_*=0$，那么 Ricci 流倾向于把目标坐标系 $\hat{X}$ 不可逆的不断粗粒化到红外流极限，所以通常从初始经典 (紫外) 尺度 $t\to-\infty$ 的原坐标系 $X(t)$ 积分到红外流极限 $\hat{X}(t_*\to 0)$

$$K\left(\hat{X}_{IR},X_{UV},\infty\right)=\int_{X(-\infty)}^{\hat{X}(0)}\mathscr{D}Xe^{-S_X}$$

这个粗粒化的坐标变换过程是不可逆的，可以想像从一个特定尺度的惯性系变到一个加速系，惯性系中的某细粒线状谱由于 Unruh 效应在加速系中变成了热辐射黑体谱。如果想逆过来，把这个加速系重新变回原来的惯性系，黑体谱需要输入额外的信息才能恢复成原来的特定线状谱，因此在这个不可逆的坐标变换过程中，坐标系失去了原来的“记忆”。特别在宇宙学尺度，Ricci 流总是不可避免的要展宽坐标系，使得在宇宙学长程尺度下没有严格的惯性系存在，长程尺度时空看起来总是加速的，带来了宇宙学尺度的加速反常。

总而言之，现在通过核函数 $K(\hat{X},X)$ 或者路径积分 (62)，可以把 X 坐标系上的物理量 $\phi(X)$ 变到 $\hat{X}$ 系

$$\phi\left(\hat{X}_{t'}\right)=\int_{M^4}dV(X)\,K\left(\hat{X},X,t'-t\right)\phi\left(X_t\right)=\int_X^{\hat{X}}\mathscr{D}X\phi\left(X\right)e^{-S_X} \tag{65}$$

一个热核 $K(\hat{X},X,t'-t)$ 把 $\phi(X)$ 的坐标中心峰值变成另一个坐标系的中心值 $\hat{X}$，就像一个经典的时空坐标变量代换所做的那样。这相当于做路径积分的半经典近似。但是这个积分变换不仅只经典的变换坐标的中心峰值。如果将这个任意的物理量 $\phi(X)$ 用时空坐标 X 做泰勒展开，那么也会在展开的平方阶引入一个超越半经典坐

标变换的量子坐标展宽，这等价于超越半经典近似的将路径积分中的二阶矩量子涨落修正的贡献也考虑在内之后，在 $\phi(X_t) \to \phi\left(\hat{X}_{t'}\right)$ 的坐标变换后被粗粒化或展宽了。这个坐标变换带来的时空展宽的额外效应是由时空的 Ricci 流导致的，将带来这个理论最主要的量子时空的效应，包括额外的引力效应和时空的热力学效应。从这个公式我们还看到，这个热核 $K(\hat{X}, X, t'-t)$ 就是一个积分核，而一般量子时空坐标变换的过程其实就是通过这个积分核做积分变换的过程。因此这个核函数 K 或者 u 密度包含了一般时空坐标变换、及其后面看到的时空引力和时空的统计热力学的最关键的信息。通过路径积分方法，或直接求解共轭热方程方法，或一般坐标变换生成特定坐标系的解的方法求出这个核函数，在这个理论中具有核心的地位。

如果不考虑坐标展宽对坐标变换的贡献，半经典坐标变换给出最低阶的热核的贡献。下面我们通过这样得到的热核去计算两个坐标变换的例子：(1）从惯性系变到另一个惯性系的热核给出频谱的多普勒频移，(2）从惯性系变到短时加速系的热核给出频谱的高斯展宽，我们会看到这种半经典坐标变换下的展宽其实和 Ricci 流的高斯展宽物理上是等效的。

1. 匀速惯性系的多普勒频移

这个方法，从一个量子标架场坐标系 X 变到其他一般的量子坐标系 $\hat{X}$，$\hat{X}$ 相对于 X 既可以是惯性系，也可以是一般的加速系。比如，如果量子标架场 $\hat{X}$ 相对于 X 系是匀速运动的，两个坐标系之间的波函数有多普勒频移。比如我们考虑切时空坐标系 $\hat{X}$ 相对 X 系以速度 v 沿着 X_1 方向匀速运动，这两个坐标系都带有展宽 $\tilde{\sigma}_{ij}^{-1}$，当速度 v 相比光速比较小，$\hat{X}_i - X_i = v\delta_{1i}X_0$，$X_0$ 是 X 系的时间，$\hat{X}_0 - X_0 = 0$，因此余切坐标系有 $\hat{X}^i - X^i = v^{-1}\delta_{1i}X^0$。要看到这个从 $X \to \hat{X}$ 的坐标变换产生的多普勒频移，我们将坐标变换的热核 (32)

$$
\begin{aligned}
K(\hat{X}, X) &= \frac{1}{\tilde{Z}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\hat{X}^i - X^i\right)\tilde{\sigma}_{ij}\left(\hat{X}^j - X^j\right)\right] \\
&= \frac{1}{\tilde{Z}} \exp\left[-\frac{1}{2}v^{-2}\delta_{1i}\delta_{1j}\tilde{\sigma}_{ij}\left(X^0\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\tilde{Z}} \exp\left[-\frac{1}{2}v^{-2}\tilde{\sigma}_{11}\left(X^0\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

做傅里叶变换

$$
\begin{aligned}
K(\hat{k}, k) =& \frac{1}{(2\pi)^2}\int dV(X)\, K(\hat{X}, X) e^{ik\cdot X} \\
=& \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\tilde{Z}}\int dX^0 \exp\left[-\frac{1}{2}v^{-2}\tilde{\sigma}_{11}\left(X^0\right)^2\right] e^{i\omega_k X^0} \\
=& \frac{1}{Z}\exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_{11}}v^2\omega_k^2\right] \\
\equiv& \frac{1}{Z}\exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_{11}}\left(\hat{\omega}_{\hat{k}} - \omega_k\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

我们看到，在半经典坐标变换下频谱空间的核函数还是一个高斯函数，频谱的展宽 $\tilde{\sigma}_{11}$ 正如量子力学不确定原理说的那样是坐标展宽的倒数，但频率中心峰值被多普勒移动到了

$$
\hat{\omega}_{\hat{k}} = (1 + v)\,\omega_k
$$

当考虑超越半经典坐标变换的量子坐标变换时，时空的量子涨落对展宽 $\tilde{\sigma}_{11}$ 有额外的贡献。

由于一个被匀加速的波的频率会随时间变化（频移），所以长时间加速下，一个单色波的频谱会被展宽到所有频率范围，从而丢失了原来单色频谱的信息，成为 Unruh 效应所给出的纯黑体谱。在一般非匀加速的情况下，频谱一般就不再是纯黑体谱来了，由于非匀加速总能在一个比较短的时间内看作是匀加速的，所以如果我们只考虑一个单色波在比较短的时间，比如只在一个周期时间内的短时间加速（远短于达到热平衡黑体谱的特征时间），加速度也不是很大，我们可以证明短时间的加速运动会将单色 delta 函数的线状谱展宽成一个有限宽度的高斯谱，并且宽度和加速度成正比。

考虑加速的时间 X^0 比较短，期间可以看作是瞬时加速度 a。当这个加速时间比热化的特征时间 $1/T \sim 1/a$ 短很多，$aX_0 \ll 1$，导致的多普勒频移变化不是很大，只是原始平面波频率 ω_k 附近的小变化，短时间 X^0 加速系中频移后的频率是 $\hat{\omega}_k = \omega_k \left(1 + aX^0\right)$。加速系 $\hat{X}$ 的波函数就是

$$\psi(\hat{X}^0) = \exp\left[-i\hat{\omega}_k X^0\right] = \exp\left[-i\omega_k \left(1 + aX^0\right) X^0\right]$$

为了只在比较短时间比较小的频移下做这个波函数的傅立叶变换来得到短时间加速的频谱，我们考虑一个在 0 时刻附近比较短时间内开窗的傅立叶变换（Gabor 变换）。对于频率为 ω_k 的平面波来说，我们有一个自然的时间坐标分辨尺度作为窗口，即频率的倒数 (一个周期)，$\sqrt{\sigma_{X_0}} = 1/\sqrt{\sigma_{00}} = 1/\omega_k$，于是我们在这个波函数的傅立叶变换中添加了 $|\sigma_{00}|^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{00}\left(X^0\right)^2}$ 项在 $X^0 = 0$ 附近开一个短时间窗口，给出 X 系的时间分辨尺度，这样短时间加速下波函数的傅立叶变换对应的频谱空间的波函数为

$$\psi(\hat{\omega}_k \sim \omega_k, X_0 \sim 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dX^0 \exp\left[-i\omega_k \left(1 + aX^0\right) X^0\right] \left[\sqrt{|\omega_k|} e^{-\frac{1}{2}\omega_k^2 \left(X^0\right)^2}\right] e^{i\hat{\omega}_k X^0}$$

这个 Gabor 变换其实就是在计算加速系中（一个周期的）波函数 $\psi(X^0 = 0)$ 和惯性系中的波函数 $e^{-i\hat{\omega}_k X^0}$ 之间的交叠。

在有限短时间窗口 $\sqrt{\sigma_{X_0}} = 1/\omega_k$ 内加速一个平面波，其频谱空间的核函数就是一个高斯密度:

$$K(\hat{\omega}_k \sim \omega_k, X_0 \sim 0) = |\psi(\omega)|^2 = \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + \omega_k^2}} \exp\left[-\frac{\left(\hat{\omega}_k - \omega_k\right)^2}{(2a)^2 + \omega_k^2}\right] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\sigma_\omega}} \exp\left[-\frac{\left(\hat{\omega}_k - \omega_k\right)^2}{2\sigma_\omega}\right] \tag{66}$$

它的中心是 ω_k，频谱展宽为

$$\sigma_\omega = \frac{1}{2}\omega_k^2 + 2a^2 \tag{67}$$

即除了本身固有（和波的能量依赖的、非普适的）频谱展宽 $\frac{1}{2\sigma_{X_0}} = \frac{1}{2}\omega_k^2$ 之外，还有一个（和波的能量无关、普适的、纯几何的）和加速度成正比的额外频谱展宽。利用 (37)，这个高斯展宽扣除掉原来 X 系展宽 $\frac{1}{2}\omega_k^2$ 之后得到相对于 X 系的相对展宽为

$$\tilde{\sigma}_\omega \approx \sigma_\omega - \frac{1}{2\sigma_{X_0}} = 2a^2$$

因此我们看到一个在 X 系中频率 ω_k 的平面波，由于半经典坐标变换，变换到一个波周期内的短时间加速系的效应就是将平面波的频谱在 ω_k 附近高斯展宽了，换句话说，一个 X 系中的平面波的短时频谱在经典加速系 $\hat{X}$ 中被加速度 a 增宽了，

$$|a| = \sqrt{\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_\omega} \tag{68}$$

当加速度是负的（减速）的情形也是同样的展宽谱线。

因此，我们证明了两个经典坐标系之间（一个周期内的短时）相对加速度 $|a|$ 正比于两个系之间频谱的相对高斯增宽 $\sqrt{\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_\omega}$，并且不同能量的模式在时间局部都以相同的加速度加速（“普适的自由下落”），不同能量的模

*式都以相同的方式被加速度展宽，这正是量子等效原理的要求。*这种加速系中普适的频谱展宽可以被抽离出来不再解释成特定粒子的加速展宽，而是时空标架场（时空坐标）自身由于局部加速而产生的展宽。

如果长时间加速，aX_0 比较大，那么在 (VII E) 我们会看到这时加速度可能会将谱线展宽成黑体谱，这就是所谓的 Unruh 效应。

加速系标架场的密度解或者热核解，更一般的也可以通过求解共轭热方程或者计算一般的路径积分来解出，比如计算坐标中心值在加速的 Rindler 背景下的共轭热方程的密度解。我们后面 (VII E) 将会证明在长时间加速的 Rindler 背景下的 u 密度被完全热化，被展宽成一个带有热平衡温度的黑体谱密度。

但这种加速度展宽相比温度产生的多普勒展宽要小很多，在实验室中可能是比较难被观测到的。当考虑超越半经典坐标变换的量子坐标变换时，时空的量子涨落会继续展宽这个相对宽度 $\tilde{\sigma}_{00}$，即物理上好像时空量子涨落的效应修改了加速度。一般来说，由于加速系的标架场被加速度展宽了，而 Ricci 流在 (46) 中贡献的 $e^{-\zeta_i\tau}$ 项在有限尺度 τ 下的粗粒化或重整化也等效的高斯展宽了密度和时空坐标，因此 Ricci 流对时空坐标或频谱的展宽和加速度的高斯展宽在物理上是无法区分的。在宇宙学尺度，这种时空加速度的展宽相比通常的温度多普勒展宽变得重要了，因此 Ricci 对时空坐标或频谱的展宽会对宇宙学中加速度（通过谱线的）测量带来额外主导的贡献，这也是我们在宇观尺度（通过测量谱线）看到宇宙在加速膨胀的根本原因 (见 VI C)。当然目前我们测量宇宙加速膨胀还不是对谱线展宽的直接测量，而是谱线的高斯（二阶）展宽会影响到观测到的距离-红移关系，这个关系会在红移的平方阶贡献一个额外的减速因子。另外对遥远星系外围的旋转曲线或者旋转加速度的测量也是通过谱线（21cm 谱线）来进行的，所以这些加速度的反常都有来自 Ricci 流额外谱线展宽的贡献 (见 VI E)。

当时空坐标系带有量子涨落 $\sigma_{\mu\nu}$ 或者等效的加速度和弯曲之后，在一般坐标变换（微分同胚变换）的经典不变性会在量子层面被破坏，称为微分同胚反常。一般坐标变换不变性在量子层面的破坏其实我们在 Ricci 流中已经初步的看到了，路径积分中间所有可能的坐标系时空构型 M_t^4 随着 Ricci 流 t 参数的粗粒化演化，由于黎曼几何的二次型度量在量子二阶矩涨落导致 Ricci 流中是不再保持的，Ricci 流是一个不等距的变化，所以 (63) 在不同 (i) 或不同 t 尺度的中间坐标系时空构型 $M_{(i)}^4$ 做体积积分 $\int_{M_{(i)}^4} d^4X_{(i)}$ 时并不保持体积，于是就导致了量子坐标变换的反常。

在这一章中我们将使用泛函积分量子化的方法更严格的导出微分同胚反常，我们将看到时空几何的微分同胚反常和一个通过 u 密度构造的单调变化的 Shannon 熵联系，这种单调性给出了标架场，也就是时空几何的单调性的 H 定理。在这个一般的量子坐标系的量子理论中，我们后面将看到，引力和时空的热力学将会自动的被包含在内。这一章也是后文中我们继续讨论这些理论后果的铺垫。

C. 微分同胚反常和 Shannon 熵

上一节通过热核方法，给出两个 (坐标系) 量子构型之间转换的一般变换理论，但还没有和我们具体的标架场理论（即 NLSM）联系起来，这一节我们通过具体的标架场理论的路径积分量子化的办法来给出更具体的坐标变换，及其在量子层面的反常 [5]。现在我们来考虑对纯标架场作用量 (15) 的泛函积分量子化，我们的目标是计算标架场靶时空 M^4 的配分函数

$$Z(M^4) = \int \mathscr{D}X \exp\left(-S_X\right) = \int \mathscr{D}X \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda \int d^4x g^{\mu\nu}\partial_a X_\mu \partial_a X_\nu\right) \tag{69}$$

其中 NLSM 描写的标架场是时空坐标 X_μ。我们在前面 (III C) 已经证明这个配分函数不依赖于实验室底空间是欧式的还是闵氏的，不失一般性我们在欧式底空间上做这个泛函积分比较方便。

这里不失一般性，考虑切时空坐标的一般坐标变换（对于余切时空的坐标变换也是类似的），

$$X_\mu \to \hat{X}_\mu = \frac{\partial \hat{X}_\mu}{\partial X_\nu} X_\nu = e^\nu_\mu X_\nu$$

并不改变作用量 $S_X[X] = S_X[\hat{X}]$，但泛函积分的测度

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}\hat{X} &\equiv \prod_x \prod_{\mu=0}^{3} d\hat{X}_\mu(x) \\
&= \prod_x \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} e^0_\mu e^1_\nu e^2_\rho e^3_\sigma dX_0(x) dX_1(x) dX_2(x) dX_3(x) \\
&= \prod_x \left|\det e^a_\mu(x)\right| \prod_x \prod_{a=0}^{3} dX_a(x) \\
&= \left(\prod_x \left|\det e^a_\mu(x)\right|\right) \mathscr{D}X
\end{aligned}$$

却改变多出来一个额外的因子 $\prod_x \left|\det e^a_\mu(x)\right|$，其中

$$\left|\det e^a_\mu\right| = \left\|\frac{\partial \hat{X}}{\partial X}\right\| = \frac{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}(\hat{X})|}}{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}(X)|}}$$

是从 X 坐标系变成 $\hat{X}$ 坐标系产生的 Jacobian。这个 Jacobian 的存在虽然保证了经典坐标变换下测度的不变性，但在量子层面，时空的 Ricci 流并不保持这个 Jacobian 或者局部体积，因此它会随着尺度变换而改变，所以一般会导致泛函积分的积分测度在一般坐标变换下改变，使得整个配分函数在一般坐标变换下不再是不变的，导致了微分同胚反常。

注意到这个 Jacobian 其实不是别的，而是坐标变换之后的体积元 $dV(\hat{X})$ 和坐标变换前的标准体积元 $dV(X)$ 之间的比值，这个体积变化不仅包括了经典坐标 (不等距) 变换带来的体积变换，也包括了 Ricci 流带来 (度量二次型修正) 的体积变化，两者其实在物理观测上无法区分。因此其实这个比值就是我们定义的相对 $\tilde{u}$ 密度

$$\frac{dV(\hat{X})}{dV(X)} = \left|\det e^a_\mu\right| = \frac{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}(\hat{X})|}}{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}(X)|}} = \frac{u(X)}{u(\hat{X})} = \tilde{u}(X|\hat{X}) = \frac{1}{\tilde{u}(\hat{X}|X)} \tag{70}$$

于是这个积分测度变化多出来的因子可以用相对 $\tilde{u}$ 密度来重写成。不失一般性，下面我们不妨设 X 坐标系是标准实验室坐标系，携带标准体积，即 $u(X) = 1$，这样相对密度可以简单的写成绝对密度的形式，即 $\tilde{u}(\hat{X}|X) = u(\hat{X})$，

配分函数就可以写成

$$\begin{aligned}
Z(\hat{M}^4) &= \int \mathscr{D}\hat{X} \exp\left(-S_X[\hat{X}]\right) \\
&= \int \left(\prod_x |\det e^a_\mu|\right) \mathscr{D}X \exp\left(-S_X[X]\right) \\
&= \int \left(\prod_x u(\hat{X})^{-1}\right) \mathscr{D}X \exp\left(-S_X[X]\right) \\
&= \int \left[\prod_x e^{-\log u(\hat{X})}\right] \mathscr{D}X \exp\left(-S_X[X]\right) \\
&= \exp\left(-\lambda \int d^4x \log u\right) \int \mathscr{D}X \exp\left(-S_X[X]\right) \\
&= \exp\left(-\lambda \int_{\hat{M}^4} d^4\hat{X} u \log u\right) \int \mathscr{D}X \exp\left(-S_X[X]\right)
\end{aligned}$$

于是我们得到一般坐标变换之后配分函数改变为了一个因子

$$Z(\hat{M}^4) = e^{\lambda N(\hat{M}^4)} Z(M^4) \tag{71}$$

其中

$$N(\hat{M}^4) = -\int_{\hat{M}^4} dV(\hat{X}) u \log u \tag{72}$$

正是用 u 密度给出的 Shannon 熵（一些文献也称之为 Neumann 熵）。

我们看到虽然在经典层面，标架场作用量在一般坐标变换下是不变的，但在量子层面，在做一般坐标变换之后，泛函积分的积分测度发生了改变，导致配分函数不再是不变的，这就是一般坐标变换（微分同胚变换）反常。发生反常的根本原因在于泛函积分是积遍标架场的整个构型空间，而在量子涨落导致的 Ricci 流下，标架场的二次型度量改变了，结果标架场给出的时空体积元和构型空间的积分测度随之改变了。我们在 (VI) 会到看，这个反常包含了时空几何和引力所有的信息，在近似下可以回到 Einstein 的经典引力理论并给出其量子修正，因此通过坐标变换产生的反常可以看作是量子等效原理的体现：即 (量子) 引力现象可以完全通过 (量子) 坐标变换引入和消除。

值得指出的是，我们对 (70) 行列式的绝对值形式是一种对 4-时空 M^4 体积的推广，它是出于这样的考虑。即就算是带有负定度量的 (赝) 黎曼几何 M^4 的体积也能保持正定和完善定义 (well-defined)，如同 (IV B) 所给出的那样，来保持 u 密度的正定。行列式带绝对值的体积定义是最简单的一种 4-时空体积推广，如果不带行列式绝对值，那么 u 密度的形式就需要引入一些额外的虚数因子 i 来保持归一化条件 (27)。在这样的正定 4-体积的定义下，整个理论在形式上就与 Perelman 给出三维空间的形式一致了，便于我们将 Perelman 的数学框架推广到 4-时空的情况。正是由于这样的原因，无论 M^4 是黎曼几何还是 (赝) 黎曼时空的情况，反常项 $N(M^4)$ 给出的是都是一个纯实数（一般不等于 1）因子，因此这个量子反常意味着不同的坐标变换不再是幺正等价的，不同的坐标选择一般将导致破坏协变性和幺正性，这是一个时空几何的 Ricci 流导致的非常普遍的结论。本质上来说这种幺正性破坏还是来自于，量子涨落的时空的构型空间相比经典无限刚性的时空的构型空间扩大了。

这种幺正性的破坏，在经典的一般坐标变换中就出现了，比如从惯性系变换到加速系或者一个加速系等价的引力弯曲时空背景中，都会出现粒子在真空中凭空的产生，从而破坏了粒子数守恒和幺正性。当一个坐标系的真空态变换到另外的一般坐标系的真空态去的时候，这两个真空态不再幺正等价，这也是经典的加速系或者弯曲时空的量子场论非常普遍的结论，著名的例子就是 Unruh 效应和 Hawking 辐射。但这些坐标变换的效应是半经典的（时空坐标系的量子涨落仍然没有考虑），这些效应本质上来源于半经典坐标变换后几何上的算子谱的类似多普勒效应的变化，在本节中这个结论被继续推广到更一般的带有量子涨落的量子坐标系的情况。

由于时间在量子涨落，只有当时间的量子涨落可以忽略的时候，满足时间幺正性的 Schrödinger 方程才近似成立。在时间和空间都量子涨落的时候，Schrödinger 方程的角色要被可以采用任何 (包括量子) 系统作为时间的 Wheeler-DeWitt 方程取代，原来要研究的量子系统的量子态作为 Schrödinger 方程的解在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_\phi$ 内，而现在整个系统的量子态作为 Wheeler-DeWitt 方程的解在一个更大的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_\phi \otimes \mathscr{H}_X$ 中。

由于一般坐标变换的反常是不可避免的，严格来说通常惯性系的概念在量子层面就是无法被严格做到，因为时空坐标总是不可避免的被量子模糊掉，坐标变换本质上是非幺正的，那么我们是否无法通过一个坐标变换将坐标系变成局部惯性系，或者通过一个坐标变换将局部引力效应完全消除？这个问题的答案是，我们需要一个反常的抵消项（见 VI A），让这个理论能回到通常局部惯性系，特别是实验室系的标准量子理论，我们将看到这个反常抵消项导致了正确的宇宙学常数（见 VI D）和标准广义相对论的一系列标准结果。我们后文就来看这个反常带来的一系列深刻的后果。

我们从半经典的 Unruh 效应和 Hawking 辐射中看到，在真空中凭空产生的粒子都是"热"的，我们后面还会看到在更一般的量子涨落的量子时空坐标系中，我们得到的量子反常 $N(M^4)$ 同样有着深刻的热力学的解释。这种解释更进一步的要求我们要将经典的等效原理做量子版本的推广。

D. 迹反常和渐近展开

量子层面一般坐标变换下，配分函数不再是不变的了，这个反常项带来的一个后果就是导致系统能动张量的迹反常。系统的能动张量的期待值定义为

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_X}{\delta g^{\mu\nu}}$$

其中 S_X 是 NLSM 的经典作用量 (15)。于是我们得到时空标架场的经典运动方程

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle \overset{\text{经典}}{=} 0 \tag{73}$$

由于标架场是经典微分同胚变换不变的，所以能动张量等于 0 很容易理解。这可以看作是量子时钟系统的方程 (7) 的类比，因此量子时空标架场自身的 Schrödinger 方程也是一个 Wheeler-DeWitt 方程，作为类似 (8) 的类比。

在量子层面原来经典的 NLSM 作用量受到了反常的修正，于是它的迹的量子期待值 $\langle T^\mu_\mu \rangle = \langle g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \rangle$ 将和期待值的迹 $\langle g^{\mu\nu} \rangle \langle T_{\mu\nu} \rangle = 0$ 不再相同，它们的差给出迹反常

$$\langle \Delta T^\mu_\mu \rangle = \langle g^{\mu\nu} \rangle \langle T_{\mu\nu} \rangle - \langle g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \rangle = -\langle T^\mu_\mu \rangle = \lambda N(M^4) \tag{74}$$

就由 Shannon 熵来贡献。Shannon 熵反常 $N(M^4)$ 完全是量子的，为了看出它和时空几何的关系，以及配分函数给出的理论和经典 Einstein 引力之间的关系，我们在红外极限 $\tau = 0$ 附近作它的小 τ 展开，文献中常称为 Schwinger-DeWitt 展开

$$N(M^D) = \sum_{n=0}^{\infty} B_k \tau^n = B_0 + B_1 \tau + B_2 \tau^2 + ..., \quad (\tau \to 0)$$

下面我们给出前面几个系数的计算。

(i) B_0:

B_0 是 $\tau \to 0$ 时的初始 Shannon 熵 N，它依赖于初始条件 $\lim_{\tau\to 0} u(X_\tau)$。我们看到，在流极限 $\tau \to 0$ 时，因为 (21)，$\delta g^{\mu\nu}_{(2)} \to 0$，从 (19) 得到

$$\lim_{\tau\to 0} \sigma^{\mu\nu} = 2\tau g^{\mu\nu}, \quad \lim_{\tau\to 0} \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2\tau} g_{\mu\nu}$$

这时展宽 $\sigma_{\mu\nu}$ 和度规 $g_{\mu\nu}$ 成正比，因此其 (协变) 梯度是零

$$\lim_{\tau\to 0}\nabla_\rho\sigma_{\mu\nu}=0$$

是一个时空均匀的展宽，说明此时几何达到了某种均匀分布的“热平衡态”，因此初始密度会和某种“热平衡”的分布有关。物理上，配分函数并不依赖于初始条件，我们原则上可以取任意一种初始 u_0，到最后再通过 u_0 对一般 u 密度做适当的归一化，也就是是定义适当的相对熵，从而使得配分函数不再依赖熵的初始条件。因此不失一般性，我们让系统熵的初始值取平坦时空中“热平衡”态的熵极大值（见 V E），类似气体处于热平衡时系综密度的 Boltzmann-Maxwell 形式，这个熵极值可以由一种平坦背景上“热平衡”的高斯密度 u_* 取得，

$$\lim_{\tau\to 0}u(X_\tau)=u_*(X)=\frac{1}{\lambda(4\pi\tau)^2}\exp\left(-\frac{|X|^2}{4\tau}\right) \tag{75}$$

这种平坦时空和高斯形式密度的构型 $(\mathbb{R}^4,\eta,u_*)$ 在数学上是一种特殊的孤立子构型，称为高斯孤立子（Gaussian Soliton），有最大的约化体积 $\tilde{V}=1$ (见 97)（其他构型约化体积都小于 1）和最大香农熵，u_* 对应于标架场粒子气体在平坦背景 $\eta_{\mu\nu}$ 上的热平衡分布密度。利用

$$\begin{aligned}\lambda\int dV(X)\,u_*\frac{|X|^2}{4\tau}&=\lambda\int dV(X)\,\frac{1}{\lambda(4\pi\tau)^{D/2}}e^{-\frac{|X|^2}{4\tau}}\frac{|X|^2}{4\tau}\\&=\frac{1}{(4\pi\tau)^{D/2}}\frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2}+1)}\int_0^\infty\frac{r^{D+1}}{4\tau}e^{-\frac{r^2}{4\tau}}dr\\&=\frac{D}{2}\end{aligned}$$

我们计算得到这个高斯密度 u_* 的极限熵

$$B_0(u_*)=\lim_{\tau\to 0}N=-\int dV(X)\,u_*\log u_*=\int dV(X)\,u_*\frac{D}{2}\left[1+\log(\lambda^{2/D}4\pi\tau)\right]=\frac{D}{2\lambda}\left[1+\log(\lambda^{2/D}4\pi\tau)\right] \tag{76}$$

值得注意的是，$B_0(u_*)$ 对应的只是特定高斯孤立子构型的熵极值 $B_0(u_*)=N_*$，如果是其他的构型将对应其他 B_0 的形式，通过 u_* 对一般 u 密度的归一化，即定义一个相对密度 $\tilde{u}=u/u_*$，即通过对熵适当的归一化（定义对应的相对熵），B_0 并不出现在理论配分函数中。

(ii) B_1:

另外，$\frac{dN}{d\tau}\equiv\mathcal{F}$ 是 Perelman 定义的 F 泛函，它相当于是算子 $-4\Delta+R$ 的第一本征值，我们有

$$\begin{aligned}\frac{dN(M^D)}{d\tau}&\equiv\mathcal{F}=-\frac{d}{d\tau}\int dV(X)\,u\log u\\&=-\int dV(X)\,\left[(1+\log u)\frac{\partial u}{\partial\tau}+Ru\log u\right]\\&=-\int dV(X)\,\left[(1+\log u)(\Delta u-Ru)+Ru\log u\right]\\&=\int dV(X)\,\left(\frac{|\nabla u|^2}{u}+Ru\right)\\&=\int dV(X)\,u\left(R+|\nabla\log u|^2\right)\\&\equiv\int dV(X)\,uR_{(u)}\end{aligned} \tag{77}$$

其中我们应用了体积的 Ricci 流

$$-\frac{d}{dt}\left(dV(X)\right)=\frac{d}{d\tau}\left(dV(X)\right)=RdV(X)$$

而 $R_{(u)} = R + |\nabla \log u|^2$ 是在密度黎曼几何中 Bakry-Emery 曲率 (38) 的标量曲率推广。由于我们对 4-时空体积和 u 密度的正定的定义，所以在 $D = 4$-时空下的形式和 Perelman 的 3 空间的形式完全相同。

由于在 $\tau \to 0$ 时，

$$\lambda \int dV(X)\, u_0 \, |\nabla \log u_0|^2 = \lambda \int dV(X)\, u_0 \frac{D}{2\tau} = \frac{D}{2\tau}$$

所以

$$B_1 = \lim_{\tau \to 0} \mathcal{F} = \int dV(X)\, u \left(R(0) + \frac{D}{2\tau} \right) \tag{78}$$

(iii) B_2:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N(M^D)}{d\tau^2} &\equiv \frac{d\mathcal{F}}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial \tau} \\ &= -2 \int dV(X)\, u \,(R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \log u)\,(R^{\mu\nu} - \nabla^\mu \nabla^\nu \log u) \\ &= -2 \int dV(X)\, u \,|R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \log u|^2 \\ &\equiv -2 \int dV(X)\, u \left| Ric_{(u)} \right|^2 \end{aligned} \tag{79}$$

其中我用了 Ricci-DeTurck 流方程 (39) 和 $Ric_{(u)}$ 的定义 (38)。反过来说，也正因此，由于

$$\delta \mathcal{F}(g^{\mu\nu}) = -\int dV(X)\, u \,(R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \log u)\, \delta g^{\mu\nu}$$

所以 Ricci-DeTurck 流正是 F 泛函的的梯度流。

在 $\tau \to 0$ 时，

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \log u_* = -\frac{1}{2\tau} g_{\mu\nu}$$

$$B_2 = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{2} \frac{d^2 N}{d\tau^2} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{2} \frac{d\mathcal{F}}{d\tau} = -\int dV(X)\, u \left| R_{\mu\nu}(0) + \frac{1}{2\tau} g_{\mu\nu} \right|^2 \tag{80}$$

因此反常项可以写成

$$e^{\lambda N(M^D)} = \lambda (4\pi\tau)^{D/2} \exp \left[\lambda \int dV(X)\, u \left(\frac{D}{2} + \tau R_{(u)}(0) - \tau^2 |Ric_{(u)}(0)|^2 + ... \right) \right], \quad (\tau \to 0) \tag{81}$$

B_0 贡献的 $\lambda(4\pi\tau)^2$ 项和指数上的第一项 $\frac{D}{2}$ 和初始条件选择有关，在物理上并不重要，并不会出现在理论配分函数中，在下一节中它们都可以通过定义一个相对熵被红外极值 Shannon 熵 $N_{\tau \to 0} \equiv N_*$ 消除掉，即

$$e^{\lambda N_{\tau \to 0}} \equiv e^{\lambda N_*} = \lambda (4\pi\tau)^{D/2} e^{D/2}$$

指数上的第二项 B_1 在 $D = 2$ 时无量纲，扮演 2 维共形反常（或 Weyl 反常）的角色，现在我们讨论的 $D = 4$，它将贡献经典 Einstein-Hilbert 引力的动力学。

如果指数上第二项在 $D = 4$ 时描写了几何体积的改变，那么第三项就描写了几何形状的改变。我们知道，共形变换是一种特殊的坐标变换，它不改变几何的形状，因此共形不变的几何相当于是一种几何在 Ricci-DeTurck 流下的不动点。所以如果几何在 τ 变化下是共形不变的，那么 Shannon 熵应该只有 $B_0 = N_{\tau \to 0}$ 极值的贡献，此时我们有 $Ric_{(u)} = 0$ 作为 F 泛函梯度流的共形不变的终点，数学文献上称之为梯度稳定 Ricci 孤立子 (gradient steady Ricci soliton)。因此在相差一些全微分比如 ΔR 或者 Gauss-Bonnet 拓扑不变量等的程度上，指数上的第三项可以解释为扮演了类似 $D = 4$ 维时空的的共形反常的角色：即如果有非平凡的第三项贡献那么几何就破坏了共形不变性，它将改变几何的形状。由于底空间维数 $d = 4 - \epsilon$ 时，$D = 4$ 的一般时空流形一般并不是共

形不变的，因此一般第三项共形反常总是存在的。而且由于随着 Ricci 流尺度变化，系统的自由度会逐渐粗粒化，因此反常自由度的数目会随着 Ricci 流尺度而变化，并不仅仅指数上的第三项度量了共形反常自由度的熵，而且指数中展开的所有项都在度量所有反常自由度的熵，最后给出总的一般坐标变换反常自由度的 Shannon 熵 N，共形反常只是 4-时空一般坐标变换总反常的一部分。

通常意义的迹反常只有共形反常贡献，但现在在量子层面，所有一般的坐标变换由于不再保二次型度量，都会贡献到迹反常里面去。如果你要在某个极限尺度下，回到一个刚性没有涨落（体积和形状不会改变）的实验室系标准时空下的理论，那么你不仅需要抵消掉第三项共形反常，你还需要抵消掉第二项体积的变化，以及所有更高阶的展开项，也就是要抵消整个 Shannon 熵反常。

E. 相对熵和量子时空的 H 定理

虽然不同的初始流形在 Ricci 流的过程中，可能不遇到奇异性而能顺利的流到终点，也可能会遇到局部奇异性出现局部瓶颈，但是可以证明无论流形的初始条件怎样，都可以通过上一节 Shannon 熵定义一个 Ricci 流的相对熵，这个相对熵在 Ricci 流的过程中总是单调变化的，不依赖于任何流形的初始构型和曲率。这个相对熵的单调性定理就是量子时空的 H 定理，因为它类似于 Boltzmann 的 H 定理，即存在一个由粒子分布函数构造的 H 泛函，一个一般的非平衡热力学系统中 H 泛函总是随时间单调变化，直到系统达到热平衡态。

上一节我们不失一般性的假定，在临近奇异尺度 t_* 极限附近都可以定义一个以 $\tau = t_* - t \to 0$ 描写的均匀展宽（均匀意为展宽 $\sigma_{\mu\nu}$ 的协变梯度为 0，$\nabla_\mu \sigma_{\mu\nu}(t_*) = 0$）的极限变成

$$u_*(X) = \frac{1}{\lambda(4\pi\tau)^2} \exp\left(-\frac{|X|^2}{4\tau}\right)$$

具有完全类似热平衡下 Boltzmann-Maxwell 的粒子分布函数的形式，它扮演一个 Ricci 流极限下的平坦时空中“热平衡”的热核的角色。

我们后面通过下标“*”来标识全局或者有限尺度的局部流极限，扮演某种全局或局部的“热平衡”极限。因此我们可以定义一个相对于这个流极限密度而言的相对密度

$$\tilde{u}(u|u_*) \equiv \tilde{u} = \frac{u}{u_*}$$

这里的“~”表示是相对的量，其中 u 是一般的非极限（“非平衡”）密度。

这样我们就能通过这个相对密度来定义一个和初始 u_0 密度无关的时空流形 M^D 的相对 Shannon 熵

$$\tilde{N}(M^D) = -\int dV(X)\, \tilde{u} \log \tilde{u} = -\int dV(X)\, u \log u + \int dV(X)\, u_* \log u_* = N - N_*$$

其中 N_* 为时空的（“热平衡”）极限 Shannon 熵 (76)

$$N_*(u_*) = -\int dV(X)\, u_* \log u_* = \frac{D}{2\lambda}\left[1 + \log(\sqrt{\lambda} 4\pi\tau)\right] \tag{82}$$

N_* 作为绝对熵极大值，抵消掉了 Shannon 熵 N 的领头阶 $B_0(u_*)$ 部分，剩下的部分就是相对于 u_* 的基本“热平衡熵”之外的相对熵。

注意到相对熵配分函数 $e^{\lambda \tilde{N}}$ 其实不是别的，正是 Perelman 给出的 Ricci 流热力学类比的配分函数 Z_p 的倒数（“倒数”并不重要只是出于方便的不同约定）

$$\log Z_P(M^D) = \int dV(X)\, u \left(-f + \frac{D}{2}\right) \geq 0$$

其中一般的 u 可以用 $f(X,\tau)$ 来参数化

$$u(X,\tau)=\frac{1}{\lambda(4\pi\tau)^{D/2}}e^{-f(X,\tau)} \tag{83}$$

具体的说，我们看到

$$\begin{aligned}\tilde{N}(M^D)&=N-N_*\\&=\int dV(X)\,u\left[f+\frac{D}{2}\log(\sqrt{\lambda}4\pi\tau)\right]-\int dV(X)\,u\frac{D}{2}\left[1+\log(\sqrt{\lambda}4\pi\tau)\right]\\&=\int dV(X)\,u\left(f-\frac{D}{2}\right)\\&=-\log Z_P(M^D)\end{aligned} \tag{84}$$

在 Perelman 的 2003 年的文章中，他通过这个配分函数能给出他的 Ricci 流泛函形式的统计力学类比。但我们的文章之前，人们包括 Perelman 本人其实并不清楚这个背后的物理的统计力学系综到底是什么。现在在这里我们看到这个 Perelman 配分函数背后的物理系综其实就是量子时空参考系的标架场构成的系综。当时空的 Ricci 流还没有流到流极限的时候，标架场系综处于非平衡态，而这时的 u 密度就是这个非平衡态中标架场粒子的粒子分布函数，正如 (IV B) 中所给出的 u 的概率密度解释，描写在 $dV(X)$ 的体积内找到标架场粒子的概率密度。

从 (79) 容易看出

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{F}}{dt}&=2\int dV(X)\,u\,|R_{\mu\nu}-\nabla_\mu\nabla_\nu\log u|^2\geq\frac{2}{D}\int dV(X)\,u\,|R-\Delta\log u|^2\\&\geq\frac{2}{D}\lambda\left[\int dV(X)\,u\,(R-\Delta\log u)\right]^2=\frac{2}{D}\lambda\mathcal{F}^2\geq 0\end{aligned} \tag{85}$$

其中第二行的不等号中的 λ 是因为将积分平方之后要借助 (27) 归一化条件 $\lambda\int dV(X)\,u=1$ 来平衡量纲。所以我们看到，F 泛函总是随 t 单调非减的，因此式中的不等式取等号，即满足方程 $\frac{d\mathcal{F}_{max}}{dt}=\frac{2}{D}\lambda\mathcal{F}_{max}^2$ 时，F 泛函取极大值 $\frac{dN_*}{d\tau}=\mathcal{F}_{max}=\frac{D}{2\lambda\tau}\geq\mathcal{F}$。

因此，利用 $\frac{dN}{d\tau}\equiv\mathcal{F}$，随着时空 Ricci 流方程的不可逆演化

$$\frac{d\tilde{N}}{dt}=\frac{dN}{dt}-\frac{dN_*}{dt}=-\mathcal{F}+\frac{D}{2\lambda\tau}\geq 0$$

系统最终会流到 Shannon 熵的红外极大值 $N_*\geq N$，无论流动过程中是否会遇到奇异性。这个不等式给出了一个类似 Boltzmann 的 H 定理的量子时空标架场的 H 定理。其中它表明量子时空的相对 Shannon 熵沿着 t 正向流动（从紫外短程到红外长程）总是单调非减的，说明量子时空的 Ricci 流是不可逆的，无论 Ricci 流动过程中时空是否会遇到奇异性。由于 Shannon 熵描写了量子时空的反常和幺正性的破坏，所以 Ricci 流过程中 Shannon 熵不断增大，量子时空不可避免会随着 Ricci 流逐渐高斯模糊而丢失信息，最终达到一种时空坐标极模糊，Shannon 熵极大化的流极限构型。这个不等式取等号，当且仅当量子时空流到了一个称之为梯度收缩 Ricci 孤立子（Gradient Shrinking Ricci Soliton）(GSRS) 的流极限构型，达到时空坐标极模糊和 Shannon 熵的极大值，达到时空标架场系综的热平衡态，此时时空标架场的粒子概率密度分布取 Boltzmann-Maxwell 形式 u_0。

文献中通常也将极大值 $\mathcal{F}_{max}$ 作为流极限 u_* 密度给出的 F 泛函

$$\mathcal{F}_*\equiv\mathcal{F}(u_*)=\frac{dN_*}{d\tau}=\frac{D}{2\lambda\tau} \tag{86}$$

来定义一个相对 F 泛函

$$\tilde{\mathcal{F}} \equiv \mathcal{F} - \mathcal{F}_* \tag{87}$$

这样关于相对熵的单调性 H 定理可以写成这个相对 F 泛函总是非正的

$$\frac{d\tilde{N}}{d\tau} = \tilde{\mathcal{F}} \leq 0 \tag{88}$$

单调函数在重整化中是否存在一直是量子场论的一个基本问题之一，对这个问题的一般回答我们目前还不能说什么。Zamolodchikov 曾证明一个 $d = 2$ 的共形场论的中心荷 c 在从紫外流向红外的重整化群流中是单调非减的，c 函数就像一个熵有效的计数了重整化过程中系统的自由度的数目。Cardy 曾猜测理论的能动张量的迹的期待值 $\langle T^{\mu}_{\mu} \rangle$ 可以作为二维 c 函数的一个推广。从我们前面的结果 (74) 可以看到，迹反常的确和 Shannon 熵是有联系的。Komargodski 和 Schwimmer 曾建议 $d = 4$ 量子场论中存在单调的 a 函数作为四维量子场论的推广。现在看来相对熵泛函完全不同于这些单调泛函。我们的时空相对熵相当于是实现了一种特定 $d = 4 - \epsilon$ 量子场论，即 NLSM 或者标架场，的单调泛函的构造。不仅证明了时空重整化群流的不可逆性，还计数了标架场和时空系统的相对熵。后面我们还会看到这个相对 Shannon 熵从紫外单调的变化到红外时有一个有限的差值，具有宇宙学中的物理意义。

当然不同于 Boltzmann 的 H 泛函的单调性定理，其中 H 泛函是关于牛顿时间这个全局参数的单调性。现在时空的相对熵 $\tilde{N}$ 的单调性并不是时间上的单调性，是关于 Ricci 流的尺度 t 参数的单调性。Ricci 流的 t 参数类似的扮演了牛顿时间这个全局参数的角色。在物理上，这种 Ricci 流的单调性是来源于时空坐标的量子涨落展宽的不可逆性。当时间的量子涨落展宽不可忽略的时候，经典时间可逆的 Schrödinger 方程也不再严格成立了，我们也可以想像在量子时间的演化中，时间坐标不断被展宽，短时间尺度内的细节逐渐被粗粒化丢失了，也将导致时间演化的不可逆性，即分立的时空坐标变换：时间反演，在量子层面也将是破坏的。

VI. 有效引力理论

我们在上一章展开 Shannon 熵反常的时候，已经初步看到了时空曲率开始出现了，暗示着这个理论和引力有关。就像在经典理论中发生的那样，如果我们能将牛顿力学表述在对一般时空坐标系中都成立，那么 Einstein 引力就自动的出现了。同样的，如果我们将一个量子理论表述在对一般量子时空坐标系统下都成立（通过适当的抵消微分同胚反常），那么这个量子理论也将自动包含一个量子的引力理论在内。

下面我们从最开始的反常配分函数 (71) 出发，来看它将如何得到一个有效的引力理论，如何回到经典的 Einstein-Hilbert 引力，在特定尺度下如何有效的修正经典引力。

上一章中我们看到 Shannon 熵 N 展开中，领头阶 B_0 给出的流极限 N_* 部分反映了熵的归一化，并没有物理上的重要性，我们可以通过减掉 N_* 得到一个物理的相对熵 $\tilde{N}(\hat{M}^D)$，于是我们得到一个通过 N_* 重新归一化的配分函数

$$Z(\hat{M}^D, \tau) = \frac{e^{\lambda N(\hat{M}^D,\tau)}}{e^{\lambda N_*}} Z(M^D) = e^{\lambda \tilde{N}(\hat{M}^D,\tau)} Z(M^D)$$

其中 $\hat{M}^D$ 是做了一般坐标变换之后的 $D = 4$ 时空，而 M^D 是还没有做一般坐标变换前的一般时空。不失一般性，如果考虑 M^D 是实验室系的标准的、刚性的、全局的、没有被量子涨落模糊的（无限精确）经典惯性系底空间 x，那么我们就能比较简单的写出 $Z(M^D)$，因为这时 NLSM 作用量 S_X 中的标架场 X 就是实验室系的底

空间的经典坐标 x，所以有

$$Z(M^D)=\exp\left[-S_X(M^D)\right]\overset{\text{实验室}}{=}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\int d^4xg^{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_a}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_a}\right)$$
$$=\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\int d^4xg^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\right)=e^{-\frac{D}{2}}\equiv e^{-2}$$

其中还是利用了标准实验室系的体积归一化条件 $\lambda\int d^4x=1$。这个实验室系标准时空的配分函数 $Z(M^D)$ 完全是经典的，整个配分函数 $Z(\hat{M}^D)$ 所有量子时空的信息都放到了相对熵反常 $\tilde{N}$ 里面，也就都放到了 Perelman 配分函数 $Z_P(\hat{M}^D)$ 中，

$$Z(\hat{M}^D,\tau)=\frac{e^{\lambda N(\hat{M}^D,\tau)-\frac{D}{2}}}{e^{\lambda N_*}}=Z_P^{-\lambda}e^{-\frac{D}{2}}=\exp\left[\lambda\int_{\hat{M}^D}dV(\hat{X})\,u\,(f-D)\right]\tag{89}$$

A. 紫外重整化条件和 Ricci 流的抵消项

由于在红外极限下 $\lim_{\tau\to 0}N(\hat{M}^D,\tau)=N_{IR}(\hat{M}^D_{IR})=N_*$，因此相对熵在红外极限下是 $\tilde{N}_{IR}(\hat{M}^D_{IR})=0$。但是它在实验室尺度，到很高的实验室紫外截断能标 $k\to\infty$ 或 $\tau\to\infty$，相对熵反常一般是非零的。所以要回到一个没有反常的实验室系（标准、刚性、无量子涨落模糊无限精确...）就需要在配分函数中引入一个抵消项，在实验室系高到紫外能标，把相对熵反常抵消掉，只剩下实验室系的经典配分函数。这个抵消项的引入可以看作是在某特定重整化点能标 (紫外)，设定了实验室系的物理重整化条件，或 Ricci 流的紫外初始条件：

$$\lim_{\tau\to\infty}\tilde{Z}(\hat{M}^D,\tau)=e^{-\frac{D}{2}}\tag{90}$$

其中 $\tilde{Z}(\hat{M}^D)$ 代表通过抵消项重整之后，在实验室系紫外满足重整化初始条件的配分函数。于是我们最终得到纯引力 (不包含物质) 的配分函数

$$\tilde{Z}(\hat{M}^D,\tau)=e^{\lambda\tilde{N}(\hat{M}^D,\tau)-\nu(\hat{M}^D_{UV})-\frac{D}{2}}\tag{91}$$

其中无量纲的紫外抵消项为

$$\nu(\hat{M}^D_{UV})=\lim_{\tau\to\infty}\lambda\tilde{N}(\hat{M}^D,\tau)=\lambda\left[\tilde{N}(\hat{M}^D_{UV})-\tilde{N}(\hat{M}^D_{IR})\right]$$

如果在 Ricci 流的过程中不遇到局部奇异性（否则需要通过局部手术改变拓扑进而才能继续演化），而能顺利流到红外（比如对一些均匀各向同性正曲率的初始时空流形），那么由于在 Ricci 流下时空流形是保持拓扑的，所以各个括号里面的时空流形在不同尺度都是拓扑等价的。抵消项可以看作是相对熵在紫外和红外之间流动变化产生的差值。由于上一节中的相对熵的单调性 H 定理，相对熵沿着 t 从红外流正向流到紫外，相对熵是非减的，所以沿着 τ 逆向流回紫外的过程中，紫外的相对熵要小于红外的相对熵 (=0)，可见在此种重整化条件 (90) 下，$\nu(\hat{M}^D_{UV})<0$。

B. Perelman 的单调泛函

紫外外抵消项 $\nu(\hat{M}^D_{UV})$ 可以借助 Perelman 提出了三种单调泛函的极限来计算。

我们注意到相对熵 $\tilde{N}(\hat{M}^D,\tau)$ 相对于 $1/\tau$ 的 Legendre 变换 (的负值) 正是 Perelman 的 W 熵泛函

$$\mathcal{W}(\hat{M}^D,u,\tau)\equiv\tau\frac{d\tilde{N}}{d\tau}+\tilde{N}=\tau\tilde{\mathcal{F}}+\tilde{N}=\int_{\hat{M}^D}dV(X)\,u\left[\tau\left(R+|\nabla f|^2\right)+f-D\right]\tag{92}$$

其中用到了 (77,84,86,87,88)。类似相对熵，W 熵泛函也是随 t 单调非减的

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{W}}{dt} &= -\tilde{\mathcal{F}} - \tau\frac{d\tilde{\mathcal{F}}}{d\tau} + \frac{d\tilde{N}}{dt} = -\tau\frac{d\tilde{\mathcal{F}}}{d\tau} - 2\tilde{\mathcal{F}} \\
&= \int_{\hat{M}^D} dV(X)\, u\left[2\tau\left|R_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu f\right|^2 - 2\left(R + |\nabla f|^2\right) + \frac{D}{2\tau}\right] \\
&= \int_{\hat{M}^D} dV(X)\, u\left[2\tau\left|R_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu f - \frac{1}{2\tau}g_{\mu\nu}\right|^2\right] \geq 0
\end{aligned}
\tag{93}
$$

Perelman 还引入一种局部 w 熵

$$
w(X,Y,\tau) = \left[\tau\left(R + 2\Delta f - |\nabla f|^2\right) + f - D\right] K(X,Y,\tau)
$$

其中 $K(X,Y,\tau)$ 是共轭热方程的核函数。这样 W 熵泛函就可以写成局部 w 熵的全时空积分 $\mathcal{W} = \int d^D X w(X,X,\tau)$。类似的也可以证明，局部 w 熵满足

$$
\Box^* w = \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \Delta + R\right) w = -2\tau\left|R_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu f - \frac{1}{2\tau}g_{\mu\nu}\right|^2 K \leq 0
$$

因此 $w(X,\tau)$ 是共轭热方程的下界解 (subsolution)。只有当时空几何满足梯度收缩 Ricci 孤立子 (gradient shrinking Ricci soliton)(GSRS) 方程

$$
R_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu f = \frac{1}{2\tau}g_{\mu\nu} \tag{94}
$$

的时候 w 才和 K 一样满足共轭热方程。值得指出的是 GSRS 方程不仅对正定度量的黎曼空间成立，对非正定度量的赝黎曼时空也成立。

观察到共轭热方程就类似一个弯曲背景上的 Schrödinger 方程，其中 τ 参数则类似这个 Schrödinger 方程的牛顿时间。所以共轭热方程的一般下界解 v（基本解 w 的叠加）可以这样来构造，即类似于物理上通过路径积分的鞍点近似来构造弯曲背景中的 Schrödinger 方程的半经典 WKB 解。Perelman 的确给出了这样的构造，通过他的约化距离 $l(X,X_0,g,\tau)$ 给出的经典路径贡献构造下界解 v，作为 u 密度的半经典近似和下限

$$
\begin{aligned}
v(X,\tau) &= \frac{1}{\lambda(4\pi\tau)^{D/2}}\int dV(X_0)\, e^{-l(X,X_0,g,\tau)} = \frac{1}{\lambda(4\pi\tau)^{D/2}}e^{-l(X,g,\tau)} \\
&\leq \frac{1}{\lambda(4\pi\tau)^{D/2}}e^{-f(X,g,\tau)} = u(X,\tau)
\end{aligned}
\tag{95}
$$

其中 Perelman 的约化距离为

$$
l(X,X_0,g,\tau) = \inf_{X'\in\Gamma}\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\int_0^\tau d\tau'\sqrt{\tau'}\left[\left|\frac{dX'}{d\tau'}\right|^2_{g(\tau')} + R(X'(\tau'))\right] \tag{96}
$$

约化距离像鞍点近似给出的经典路径一样，度量了从路径基点 (base point)$X'(\tau'=0) = X_0$ 走到终点 (end point)$X'(\tau'=\tau) = X$ 的距离极值。其中 $R(X'(\tau'))$ 是在 τ' 尺度在点 $X'(\tau')$ 处的标量曲率。$\inf_{X'\in\Gamma}$ 是取所有连接开始点 $X' = X_0$ 和终点 $X' = X$ 的所有路径 Γ 中最短的距离。

于是通过 $v(X,\tau)$ 下界解就可以定义基点 X_0 附近的逆向流约化体积

$$
\tilde{V}(\hat{M}^D,\tau) \equiv \int_{\hat{M}^D} dV(X)\, v(X,\tau) \tag{97}
$$

类似的，我们也可以证明约化体积 $\tilde{V}(M^D,\tau)$ 也是随 t 单调非减的

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{V}}{dt} &= \frac{d}{dt}\int dV(X)\, v(X,\tau) = \int dV(X)\, \frac{dv}{dt} + v\frac{d}{dt}\left(\int dV(X)\right) \\ &\geq \int dV(X)\, \left(-\Delta + R\right) v - \int dV(X)\, Rv \\ &= -\int dV(X)\, \Delta v = 0\end{aligned}$$

这不同于体积的 Ricci 流，局部体积的 Ricci 流是收缩还是膨胀，依赖于局部的曲率的正负。而约化体积的 t 导数中和曲率依赖的项被抵消了，所以约化体积的 Ricci 流总是单调随 t 非减的。而且约化体积是无量纲的，代表了某种体积比，因此这种约化体积特别适合于用来研究几何在临近奇异点附近的行为。

由于 u 密度可以作为 v 的上限，而我们前面已经看到 u 密度其实可以看作是实验室系标准欧氏平坦体积元和局部的时空体积元之比 (31)，u 的全时空积分将标准欧氏平坦时空体积归一化成 1。于是作为 v 的全时空积分，约化体积，则可以解释为全时空体积 $\mathrm{Vol}(\hat{M}^D)$ 和实验室系的欧氏平坦标准体积 $\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^D)$ 之比总是小于 1，

$$\lambda\int_{\hat{M}^D} dV(\hat{X})\, v = \tilde{V}(\hat{M}^D,\tau) = \frac{\mathrm{Vol}(\hat{M}^D,\tau)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^D)} \leq \lambda\int_{\hat{M}^D} dV(\hat{X})\, u = 1$$

这个不等式取等号，当且仅当时空几何是平坦的。

不等式一般都小于 1 是因为，时空在红外极限 $\tau\to 0$ 如果渐近流到有一个有界 (bounded) 的曲率，那么这个几何就总可以被放大和重标度成近乎平坦的，以至于它在 $\tau\to 0$ 的极限下有渐近为 1 的约化体积。由于约化体积的单调性，随 τ 单调非增的，所以在 $\tau>0$ 的尺度，约化体积总是小于欧氏时空标准体积 1。

Perelman 的三个单调泛函 $\tilde{N}$，$\mathcal{W}$ 和 $\tilde{V}$ 之间的关系可以这样来看。首先由于 Ricci 流的红外流终点 $\tau\to 0$ 几何的 W 熵泛函达到极值，(93) 在此极限下取等号，几何近乎是一个 GSRS，满足 (94)，这将在逆向流中保持。

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to\infty}\lambda\mathcal{W} &= \lim_{\tau\to\infty}\lambda\int_{\hat{M}^D} dV(X)\, u\left[\tau\left(|\nabla f|^2+R\right)+f-D\right] \\ &= \lim_{\tau\to\infty}\lambda\int_{\hat{M}^D} dV(X)\, u\left(\tau\left(\Delta f+R\right)+f-D\right) \\ &= \lim_{\tau\to\infty}\lambda\int_{\hat{M}^D} dV(X)\, u\left(\frac{D}{2}+f-D\right) \\ &= \lim_{\tau\to\infty}\lambda\tilde{N} = \nu(\hat{M}^D_{UV})\end{aligned} \tag{98}$$

其中第三个等号我们用了 GSRS 方程 (94) 的迹的形式 $R+\Delta f=\frac{D}{2\tau}$。

另一方面如果我们令

$$\lim_{\tau\to\infty}\left[f(X,\tau)-l(X,\tau)\right] = C$$

也就是令约化体积在紫外收敛到一个常数 e^C

$$\lim_{\tau\to\infty}\tilde{V}(\hat{M}^D,\tau) = \lim_{\tau\to\infty}\frac{\int_{\hat{M}^D} dV(\hat{X})\, v}{\int_{\hat{M}^D} dV(\hat{X})\, u} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{\int_{\hat{M}^D} dV(\hat{X})\, e^{-l(X,\tau)}}{\int_{\hat{M}^D} dV(\hat{X})\, e^{-f(X,\tau)}} = e^C \leq 1 \tag{99}$$

那么我们还有

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to\infty}\lambda\mathcal{W} &= \lim_{\tau\to\infty}\lambda\int_{\hat{M}^D} dV(X)\,u\left[\tau\left(|\nabla f|^2+R\right)+f-D\right]\\ &= \lim_{\tau\to\infty}\lambda\int_{\hat{M}^D} dV(X)\,u\left[\tau\left(|\nabla l|^2+R\right)+f-D\right]\\ &= \lim_{\tau\to\infty}\lambda\int_{\hat{M}^D} dV(X)\,u\left[2f-C-D\right]\\ &= \lim_{\tau\to\infty}2\lambda\tilde{N}-C\\ &= 2\nu(\hat{M}^D_{UV})-C \end{aligned} \tag{100}$$

其中第三个等号我们用到了 $|\nabla l|^2+R-\frac{l}{\tau}=0$。由于 $\tau>0$ 时 v 也满足 GSRS 方程 $R_{\mu\nu}+\nabla_\mu\nabla_\nu l=\frac{1}{2\tau}g_{\mu\nu}$，我们先将 GSRS 方程两边做协变导数得到 $\nabla_\mu R_{\nu\rho}-\nabla_\nu R_{\mu\rho}+R_{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho l=0$，再用 Bianchi 恒等式 $\nabla_\nu R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\nabla_\mu R$，得到 $\nabla_\mu R=2R_{\mu\nu}\nabla_\nu l$，所以最后得到 $\nabla_\mu\left(R+|\nabla l|^2-\frac{l}{\tau}\right)=2\left(R_{\mu\nu}+\nabla_\mu\nabla_\nu l-\frac{1}{2\tau}g_{\mu\nu}\right)\nabla_\mu l=0$，所以相差一个常数的程度上有 $|\nabla l|^2+R-\frac{l}{\tau}=0$。

通过 (98)=(100)，我们就得到

$$\nu(\hat{M}^D_{UV})=C=\log\left[\lim_{\tau\to\infty}\tilde{V}(\hat{M}^D,\tau)\right]$$

因此我们有紫外抵销项和三个单调泛函的关系

$$\nu(\hat{M}^D_{UV})\equiv\lim_{\tau\to\infty}\lambda\tilde{N}(\hat{M}^D,\tau)=\lim_{\tau\to\infty}\lambda\mathcal{W}(\hat{M}^D,\tau)=\log\left[\lim_{\tau\to\infty}\tilde{V}(\hat{M}^D,\tau)\right]$$

于是我们看到 $\nu(\hat{M}^D_{UV})$ 的几何的解释就是当几何逆向流到紫外极限下，(量子) 时空几何和 (经典) 实验室标准欧氏平坦时空的相对体积比的对数

$$e^{\nu(\hat{M}^D_{UV})}=\tilde{V}(\hat{M}^D_{UV})=\frac{\mathrm{Vol}(\hat{M}^D_{UV})}{\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^D)}=\exp\left[\Theta(\hat{M}^D)\right]$$

在一些文献中又将这个紫外极限下的约化体积称为流形 $\hat{M}^D$ 的中心密度 $\exp\left[\Theta(\hat{M}^D)\right]$ (Central density) 或者高斯密度 (Gaussian density)，是这个流形的某种拓扑不变量。

C. 晚期宇宙的加速膨胀和距离-红移关系

有了这个关系，我们就可以考虑一种物理上的情况来具体的计算 $\nu(\hat{M}^4_{UV})$ 的数值及其在物理上的解释了。我们考虑宇宙学观测上的均匀各向同性的 Friedman-Roberson-Walker (FRW) 度规，

$$ds^2=-\left(dX^0\right)^2+\mathbf{a}^2(X^0)\left[\left(dX^1\right)^2+\left(dX^2\right)^2+\left(dX^3\right)^2\right]$$

这个度规虽然在宇宙膨胀历史的一般时期，空间和时间并不是平权的，即空间的标度因子 a^2 在随时间 X_0 膨胀但时间本身并不膨胀。但是在时间很接近当前时期，即宇宙学中红移不是很高的膨胀“晚期”X^0_L，空间和时间可以看作是近乎就是平权的。另外由于时空度规现在还是 Ricci 流尺度参数 t 或者逆流参数 τ 的函数，所以这时后期 FRW 度规可以写成

$$ds^2_L=\mathbf{a}^2(X^0_L,\tau)\left[-\left(dX^0\right)^2+\left(dX^1\right)^2+\left(dX^2\right)^2+\left(dX^3\right)^2\right]$$

晚期宇宙几何完全由一个时间和空间平权的晚期宇宙标度因子或者半径 $\mathbf{a}^2(X^0_L,\tau)$ 描写，描写时间和空间共同相对于实验室系的相对尺度。可以通过晚期宇宙观测到的光谱和实验室系的对应光谱之间的相对比较来测量，比

如，比较这两套谱线之间的红移来测量晚期时空相对实验室系的退行速度，比较这两套谱线之间的谱线展宽来测量晚期时空相对于实验室系的加速度等。如果限于只讨论晚期宇宙的时空度规或标度因子，那么我们可以略去标度因子中的晚期时间 X_L^0 只写成 $a^2(\tau)$

$$ds_L^2 = \mathbf{a}^2(\tau)\left[-\left(dX^0\right)^2 + \left(dX^1\right)^2 + \left(dX^2\right)^2 + \left(dX^3\right)^2\right] \tag{101}$$

把这个晚期的均匀 (时空) 各向同性的度规 $g_{\mu\nu} = \mathbf{a}^2(\tau)\eta_{\mu\nu}$ 或者 Wick 转到欧氏时空的度规 $g_{\mu\nu} = \mathbf{a}^2(\tau)\delta_{\mu\nu}$ 带入 Ricci-DeTurck 方程，并考虑 Ricci 曲率是 $R_{\mu\nu} = \frac{D-1}{\mathbf{a}^2}g_{\mu\nu}$，以及 u 密度也是均匀 (时空) 各向同性的 $\nabla_\mu\nabla_\nu \log u = 0$，所以得到

$$\frac{\partial \mathbf{a}^2}{\partial t} = -2(D-1) \quad \text{或} \quad \frac{\partial \mathbf{a}^2}{\partial \tau} = 2(D-1)$$

要求这些微分方程需要设置适当的初始条件，这相当于设置的重整化点的抵消项。第一个 Ricci 流方程的解

$$\mathbf{a}^2(t) = \mathbf{a}^2(t_0) - 2(D-1)t = \left[1 - \frac{2}{D}R(t_0)t\right]\mathbf{a}^2(t_0) = \mathcal{Z}(t)\mathbf{a}^2(t_0) \tag{102}$$

我们观察到任何一个有限初始 t_0 的有限的经典标度因子 $\mathbf{a}(t_0)$ 的初始条件都会在有限 $t_* = \frac{\mathbf{a}^2(t_0)}{2(D-1)}$ 时被 Ricci 流缩成一点。原则上说，要避免这种缩成一点的奇异性，需要引入抵消项，这相当于将重整化函数 $\mathcal{Z}(t) = 1 - \frac{2}{D}R(t_0)t + \delta_{\mathcal{Z}}$，在紫外设置适当的抵消项 $\delta_{\mathcal{Z}}$ 或重整化条件，让紫外 $t \to -\infty$ 实验室系的标度因子归一化到标准刚性的实验室标度，同时在红外体积也不会再缩成一点

$$\lim_{t\to-\infty} \mathcal{Z}(t) = 1$$

从 (102) 看，标度因子和体积在紫外是发散的，无法这样简单的计算出抵消项。但注意到其实我们还有另外一种无量纲的单调变化的体积，Perelman 的约化体积，比较适合于用来考虑临近奇异点附近的几何。我们考虑到如果在非常接近红外极限的有限 $t \to 0$，曲率虽然很大但在有限 $t \to 0$ 还是有界的，那么就有一个有限的约化体积，然后随着从极端红外的出发点的逆流到 $\tau > 0$，这个约化体积会单调减小到紫外收敛成常数，因此我们可以通过借助无量纲的约化体积的有界性来帮助我们对时空几何临近奇异点附近进行控制，以防止几何发生无意义的奇异性，使其能被适当的重标度在紫外标度因子归一。

我们先看还没有设置抵消项重整化条件的第二个方程的解，这样得到的非常接近红外极限的解就是

$$\mathbf{a}^2(\tau) = 2(D-1)\tau \tag{103}$$

因此在非常接近红外极限的时候，我们看到这个 Ricci 流方程其实就是一个 GSRS 方程

$$R_{\mu\nu} = \frac{D-1}{\mathbf{a}^2}g_{\mu\nu} = \frac{1}{2\tau}g_{\mu\nu} \tag{104}$$

此时 Ricci 流只是在缩小几何的体积，并不再改变几何的形状，所以总是能通过重整化抵消项重标度它，使得它满足紫外重整化条件。Ricci 流方程在红外附近已经是 GSRS 方程的原因也很简单，均匀各向同性的宇宙学原理作为初始时空几何的假设，在 Ricci 流意义下，已经假设初始的 FRW 度规在大尺度上已经抹掉了局部的不均匀性和各向异性，使得这个晚期 FRW 度规构型作为 Ricci 流的初始条件已经是红外流极限的 GSRS 构型了，这个构型在 Ricci 流下只改变大小 $\mathbf{a}^2$，不再改变局部的形状。我们完全可以想象，如果 Ricci 流意义下初始时空几何是比较一般的不均匀和各向异性的构型，只要它们不是太大（不导致局部 Ricci 流演化出奇异性），那么 Ricci 流这时一般不仅会改变时空几何的大小也改变局部形状，经过 Ricci 流这样足够的演化，这些初始的不均匀和各向异性都将被 Ricci 流（像热方程那样）逐渐粗粒化抹掉，逐渐变成宇宙学观测意义上的近乎均匀和各向同性的 FRW 度规，进而达到红外极限下只改变体积不改变局部形状的 GSRS 时空构型。因此从这个意义上，Ricci 流其实也可以看作是一种实现宇宙学原理的物理机制。

我们回到用约化体积来计算抵消项的问题，抵消项 ν 的作用是设置适当的紫外实验室系初始条件，通过抵消项将约化体积或者体积比固定在紫外实验室系为标准体积 1。由于体积比从红外流到紫外会单调减小并收敛到一个常数的紫外约化体积，所以如果从紫外的标准体积 1 逐渐 Ricci 收缩到红外，也将收敛到一个常数有限的体积比。这个抵消项 $\nu(\hat{M}^4_{UV})$ 或者约化体积就可以这样来计算，计算这个以标度因子 $\mathbf{a}^2(\tau)$ 为半径的时空球 $\hat{M}^4 \cong \mathbb{B}^4$ 在从红外逆流 (103) 到紫外 $\tau \to \infty$ 的体积 $\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^4)$ 和在相应尺度 $\tau \to \infty$ 下欧氏平坦时空的体积 $\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^4)$ 之比。虽然时空的半径 (103) 和体积在紫外 $\tau \to \infty$ 趋于无穷，但欧氏平坦全时空的体积在紫外也是无穷的，但如同 (99) 显示的那样，它们之间的比值可以单调减小并收敛于一个常数 $e^\nu = \lim_{\tau\to\infty} \tilde{V}$。借助约化体积的定义 (97)，其中在紫外的约化距离 (96) 在很大的半径 $\lim_{\tau\to\infty} a^2(\tau) \to \infty$ 下可以用高斯距离 $|X|^2/4\tau$ 来近似给出，于是我们得到

$$\begin{aligned} e^{\nu(\mathbb{B}^4_{UV})} = \tilde{V}(\mathbb{B}^4_{UV}) &\overset{D=4}{\approx} \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{(4\pi\tau)^{D/2}} \int_{\mathbb{B}^4} dV(X)\, e^{-\frac{|X|^2}{4\tau}} \\ &\overset{D=4}{=} \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{(4\pi\tau)^{D/2}} \int_0^{a(\tau)=\sqrt{2(D-1)\tau}} e^{-\frac{r^2}{4\tau}} \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)} r^{D-1} dr \\ &\overset{D=4}{=} 0.442 \end{aligned} \tag{105}$$

也就是

$$\nu(\mathbb{B}^4_{UV}) \approx -0.8 \tag{106}$$

注意到标准欧氏平坦时空体积可以看作是

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_{\mathbb{R}^D} dV(X)\, e^{-\frac{|X|^2}{4\tau}} = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4\tau}} \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)} r^{D-1} dr = \lim_{\tau\to\infty} (4\pi\tau)^{D/2}$$

所以虽然时空体积 $\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^4)$ 和实验室欧氏平坦体积 $\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^4)$ 在紫外都是发散的，但之间的比值是有限的，这个约化体积 $\tilde{V}(\mathbb{B}^4_{UV})$ 的确度量了它们之间的比值

$$\begin{aligned} e^{\nu(\mathbb{B}^4_{UV})} = \tilde{V}(\mathbb{B}^4_{UV}) &\overset{D=4}{\approx} \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{(4\pi\tau)^{D/2}} \int_{\mathbb{B}^4} dV(X)\, e^{-\frac{|X|^2}{4\tau}} \\ &\overset{D=4}{=} \lim_{\tau\to\infty} \frac{\int_{\mathbb{B}^4} dV(X)\, e^{-\frac{|X|^2}{4\tau}}}{\int_{\mathbb{R}^4} dV(X)\, e^{-\frac{|X|^2}{4\tau}}} \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^4)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^4)} = 0.442 \end{aligned}$$

以这个紫外抵消项为 Ricci 流的初始条件，从紫外实验室系经抵消项重整后的标度因子 $\mathbf{a}^2_{re}(\tau\to\infty) \equiv 1$ 给出的欧氏平坦标准体积 1，经过 Ricci 流从紫外到红外的演化，时空体积只收缩到常数的体积比值。我们可以由 (103) 或者体积元的 Ricci 方程

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(dV(\hat{M}^4,\tau)\right) = R\left(dV(\hat{M}^4,\tau)\right)$$

近似估计一下晚期时空体积元 $dV(\hat{M}^4,\tau)$ 在红外的 Ricci 流变化。而认为标准实验室体积 $dV(\mathbb{R}^4)$ 几乎固定不变，这样在近晚期测量到的时空 4-体积元 $dV(\hat{M}^4,\tau)$ 相对于标准实验室体积元 $dV(\mathbb{R}^4)$ 的比，在考虑了抵消项 ν 的紫外重整化条件之后，在红外就近似可以写成

$$\frac{dV(\hat{M}^4,\tau)}{dV(\mathbb{R}^4)} \approx e^{R\tau+\nu} \tag{107}$$

这个公式指数上第一项只是在 τ 比较小的红外时候的估计，在 τ 比较大的时候不再适用，在 τ 比较大的时候，分母的变化也要考虑，这样这个体积比在紫外就收敛了。总之，我们可以设想，这个体积比在 $\tau\to\infty$ 的紫外，

$\nu < 0$ 将抵消掉随 τ 增长的部分，使得体积比在紫外可以被归一化为 1，在抵消项的作用下时空回到实验室的标准刚性时空。而在 $\tau \to 0$ 的红外极限下，由于 $\lim_{\tau\to 0} R\tau = 0$，晚期时空体积元 $dV(\hat{M}^4, \tau)$ 在长程红外尺度逐渐缩小，但体积比趋于有限值 $e^{\nu} < 1$。

标度因子的平方 $\mathbf{a}^2$ 在宇宙学观测上相对于实验室系的变化现在有两个来源：（1）一个是由标度因子的期待值 $\langle \mathbf{a}(X^0) \rangle$ 随不同宇宙时期 X^0 或红移的变化带来的，这个效应显示了在不同宇宙时期，宇宙是在哈勃膨胀的；（2）另一个，现在考虑了时空的 Ricci 流或者时空度规的二阶矩涨落带来的 $\langle \mathbf{a}^2(\tau) \rangle$ 随尺度 τ 的变化，这个效应将显示在晚期 X_L^0 附近宇宙是在加速膨胀的。所以现在考虑标度因子平方的变化可以写成两部分的贡献，考虑到 (20) $\langle g^{\mu\nu} \rangle = g^{\mu\nu}_{(1)} + \delta g^{\mu\nu}_{(2)}$，即 $\langle g_{\mu\nu} \rangle = g^{(1)}_{\mu\nu} - \delta g^{(2)}_{\mu\nu}$，现在有

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta \mathbf{a}^2 \rangle &\equiv \langle \Delta \mathbf{a} \rangle^2 - \langle \delta \mathbf{a}^2(\tau) \rangle = \mathcal{Z} \langle \Delta \mathbf{a} \rangle^2 \\
&= \left\langle \mathbf{a}(X_L^0, \tau) - \mathbf{a}(X_L^0 - \Delta X^0, \tau) \right\rangle^2 - \left\langle \mathbf{a}^2(X_L^0 - \Delta X^0, \tau_0) - \mathbf{a}^2(X_L^0 - \Delta X^0, \tau) \right\rangle
\end{aligned}
$$

第一项是在对于相同的宇宙学长程尺度 τ，但不同时期（稍早时期 $X_L^0 - \Delta X^0$ 和地球实验室所在的晚期 X_L^0）测量到的经典尺度因子变化的贡献。其中考虑时间跨度不大 $\frac{\Delta X^0}{X_L^0} \ll 1$，还是在晚期附近，这样 FRW 度规中的时间和空间还是近乎平权的，标度因子能完全给出时间和空间的共同尺度。第二项是在相同的时期 $X_L^0 - \Delta X^0$，但在不同的 Ricci 流尺度（τ 是宇宙学长距离尺度，τ_0 是实验室标准尺度，$\tau_0 > \tau$）由度规二阶矩量子涨落的给出的贡献。

第一项，在宇宙尺度 τ，标度因子的期待值在稍早期 $X_L^0 - \Delta X^0$ 和晚期 X_L^0 之间的变化可以用两个时期测量到的两套谱线的中心值之差来测量红移 $\langle z \rangle$

$$
1 + \langle z \rangle = \frac{\langle \mathbf{a}(X_L^0, \tau) \rangle}{\langle \mathbf{a}(X_L^0 - \Delta X^0, \tau) \rangle} \tag{108}
$$

第二项，在稍早期，尺度变化带来的标度因子的二阶矩涨落可以通过尺度在 τ 和 τ_0 之间谱线的相对高斯展宽（高斯展宽之差）带来的红移的高斯展宽 $\langle \delta z^2 \rangle$ 来测量

$$
1 + \frac{1}{2} \langle \delta z^2 \rangle = \frac{\langle \mathbf{a}^2(X_L^0 - \Delta X^0, \tau_0) \rangle}{\langle \mathbf{a}^2(X_L^0 - \Delta X^0, \tau) \rangle} \tag{109}
$$

那么由 (108) 和 (109) 可得

$$
\frac{\langle \delta z^2 \rangle}{\langle z \rangle^2} = 2 \frac{\langle \mathbf{a}^2(X_L^0 - \Delta X^0, \tau_0) - \mathbf{a}^2(X_L^0 - \Delta X^0, \tau) \rangle}{\left\langle \mathbf{a}(X_L^0, \tau) - \mathbf{a}(X_L^0 - \Delta X^0, \tau) \right\rangle^2} = 2 \frac{\langle \delta \mathbf{a}^2(\tau) \rangle}{\langle \Delta \mathbf{a} \rangle^2}
$$

现在中心值的平方 $\langle \Delta \mathbf{a} \rangle^2$ 虽然也在宇宙长程的 τ 尺度，但这个长程尺度的 Ricci 流效应并不改变中心值，只产生展宽，所以中心值的平方 $\langle \Delta \mathbf{a} \rangle^2$ 可以看作下的经典时空的距离二次型。而平方的期待值 $\langle \Delta \mathbf{a}^2 \rangle \equiv \langle \Delta \mathbf{a} \rangle^2 - \langle \delta \mathbf{a}^2(\tau) \rangle$ 则是包含了宇宙尺度 τ 给出的二阶矩涨落贡献在内的量子时空的距离二次型。它们之比可以借助近晚期的量子时空 4-体积元和经典时空 4-体积元之比 (107)（的开平方）来计算

$$
\frac{\langle \Delta \mathbf{a}^2 \rangle}{\langle \Delta \mathbf{a} \rangle^2} = 1 - \frac{\langle \delta \mathbf{a}^2(\tau) \rangle}{\langle \Delta \mathbf{a} \rangle^2} = \sqrt{\frac{dV(\hat{M}^4, \tau)}{dV(\mathbb{R}^4)}} \approx e^{\frac{1}{2}(R\tau + \nu)}
$$

就得到在红外极限长程尺度 $\tau \to 0$ 时，由于 (105)，

$$
\frac{\langle \delta \mathbf{a}^2(\tau) \rangle}{\langle \Delta \mathbf{a} \rangle^2} \approx 1 - e^{\frac{1}{2}(R\tau + \nu)} \overset{\tau \to 0}{=} 0.34
$$

于是在宇观红外尺度，红移的方均高斯展宽和红移的均方值有一个 $O(1)$ 的极限

$$
\lim_{\tau \to 0} \frac{\langle \delta z^2 \rangle}{\langle z \rangle^2} \approx 2 \left(1 - e^{\frac{1}{2}\nu} \right) = 0.68 \tag{110}
$$

虽然红移的高斯展宽可能有很多来源，比如多普勒展宽、热展宽等，但在宇宙学尺度，当谱线自身的本动足够小时，仍然有一个 $O(1)$ 的量子的、和谱线能量无关的、各向同性的、普适的高斯展宽。类似于在宇宙学尺度，当谱线自身本动足够小时，谱线有一个普适的红移，描写时空自身的哈勃膨胀一样。正是因为这个红移展宽的普适性，所以可以将这个性质也归结到时空，而不再是谱线自身的性质，描写时空自身的加速 (膨胀)。

更严格的，我们来看宇宙学中通过测量距离-红移关系，比如通过标准烛光测量光度距离 d_L，通过相应的光谱测量红移 z，然后将测量到的很多星体的距离 d_L 和红移 z 点连成曲线。这条曲线可以简单的通过红移的幂函数来拟合

$$d_L = \frac{1}{H_0}\left(\langle z\rangle + \frac{1}{2}\langle z^2\rangle + ...\right)$$

在小红移时，拟合的曲线是线性的，斜率给出小红移时的哈勃常数。而在红移不再小的时候，需要考虑红移的平方阶的贡献，曲线不再是线性，曲线变弯的程度可以拟合出一个时空膨胀的加速度。考虑到红移涨落带来的高斯展宽

$$\langle z^2\rangle = \langle z\rangle^2 + \langle \delta z^2\rangle = \left(1 + \frac{\langle \delta z^2\rangle}{\langle z\rangle^2}\right)\langle z\rangle^2$$

我们看到红移的高斯展宽并不改变红移的中心值，因此不修正曲线的红移线性阶，哈勃膨胀速率不受影响，但修正了曲线的红移平方阶，给出一个等效的加速度 $\frac{\langle \delta z^2\rangle}{\langle z\rangle^2}$，

$$d_L = \frac{1}{H_0}\left[\langle z\rangle + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\langle \delta z^2\rangle}{\langle z\rangle^2} + ...\right)\langle z\rangle^2 + ...\right] = \frac{1}{H_0}\left[\langle z\rangle + \frac{1}{2}\left(1 - q_0\right)\langle z\rangle^2 + ...\right] \tag{111}$$

其中由于红移高斯展宽总是正的，所以等效贡献一个负的减速因子

$$q_0 = -\frac{\langle \delta z^2\rangle}{\langle z\rangle^2} \approx -0.68 \tag{112}$$

通过一个量子时钟 (III B) 展宽的模型 [1, 2] 计算得到一个接近的值 $q_0 = -\frac{\langle \delta T^2\rangle}{\langle T\rangle^2} = -\frac{2}{\pi} \approx -0.64$。

这个通过红移的高斯展宽给出的宇宙加速膨胀是这个理论的一个重要的预言。如果我们不通过单独测量距离 d_L 和单独测量红移中心值 z，然后再拟合到红移的平方阶来给出减速因子，而是如果直接测量红移的内禀的量子高斯展宽（不包含多普勒展宽或热展宽等非普适的效应），虽然真实观测到的谱线红移展宽可能会有这些效应的贡献，但在宇宙学尺度谱线本动足够小的时候，谱线红移的内禀量子的高斯展宽可以完全主导其他可能的展宽效应，并和红移的均方值成简单的线性关系，比例系数是一个 $O(1)$ 的常数，贡献一个负的减速因子。

而且我们也注意到，晚期看到加速膨胀，这里的"晚期"在宇宙膨胀历史中并没有绝对的意义，无论观察者在任何宇宙时期，通过观测谱线来测量宇宙的时空，都会看到这种谱线的高斯展宽带来的等效的宇宙加速膨胀的效应。在 (111) 中红移的平方项中的 ... 如果还考虑到无压强的普通物质的贡献 $\Omega_M(1+z)^3$，那么平方项的括号里就变成 $1 + 0.68 - \Omega_M(1+z)^3$，那么无论在任何时期的观察者都会看到在相对低红移 $z_c \approx \left(\frac{0.68}{\Omega_M}\right)^{1/3} - 1 \approx 0.3$ 的晚期 $0.68 > \Omega_M(1+z)^3$，即时空变成加速膨胀的。这在某种意义上能帮助我们理解所谓的"巧合问题"，即既然产生加速膨胀的所谓"暗能量"并不随宇宙膨胀而稀释，但物质密度会被宇宙膨胀所稀释，所以暗能量要和物质密度同等量级只会发生在特定的历史时刻，但为什么在"现在"这个历史时刻正好巧合的看到了暗能量和物质密度是同等量级的。

D. 宇宙学常数和有效 Einstein-Hilbert 作用量

上一节我们看到这个理论给出了一种晚期宇宙加速膨胀的效应，这一节我们来看如何给出有效的宇宙学常数 [3, 4]。我们从配分函数 (91) 出发

$$\tilde{Z}(M^D, \tau) = e^{\lambda \tilde{N}(M^D,\tau) - \nu(M^D_{UV}) - \frac{D}{2}}$$

这个反常导致的配分函数描写了标架场给出的时空的量子的动力学，根据量子等效原理，这个配分函数也描写一种引力。为了看清楚这种引力和经典广义相对论给出的引力的关系。我们将其中的相对熵 $\tilde{N}$ 做低能的展开。考虑到在红外极限下 $\lim_{\tau\to 0}\tilde{N}(M^D,\tau)=0$，所以在红外小 τ 下可以将相对熵做 τ 的 Taylor 展开，

$$\begin{aligned}\tilde{N}(M^D) &= \lim_{\tau\to 0}\frac{d\tilde{N}}{d\tau}\tau + O(\tau^2) = \tau\tilde{\mathcal{F}} + O(\tau^2)\\ &= \int_{M^D} dV(X)\,u_0\left[\left(R(0)+|\nabla\log u_0|^2-\frac{D}{2\tau}\right)\tau\right]+O(\tau^2)\\ &= \int_{M^D} dV(X)\,u_0 R(0)\tau + O(\tau^2)\end{aligned} \tag{113}$$

其中我们利用了 (77,84,86,87,88) 以及 $\lambda\int_{M^D} d^D X u_0|\nabla\log u_0|^2=\frac{D}{2\tau}$。于是我们得到这个配分函数给出的低能有效作用量

$$-\log\tilde{Z}(M^D) = S_{eff} = \lambda\int_{M^D} dV(X)\,u_0\left[\frac{D}{2}-R(0)\tau+\nu+O(R^2\tau^2)\right] \tag{114}$$

这个有效作用量中的第一项 $\frac{D}{2}\lambda$，来自配分函数指数中的 $\frac{D}{2}$，给出半经典近似 (18) 中的常数项 2λ。当超越半经典近似，Ricci 流的效应开始重要的时候，配分函数指数中的相对熵或者有效作用量中近似的第二项 $-R(0)\tau$ 就是开始对半经典近似常数项 $\frac{D}{2}\lambda$ 产生量子修正，正好给出 Einstein-Hilbert 引力的动力学；而有效作用量中的第三项抵消项固定了一个紫外重整化条件，让相对熵在紫外能被抵消项完全抵消，回到完全经典刚性的实验室系时空。

在 $D=4$ 时，注意到红外极限下的宇观渐近标量曲率 $R(0)$ 可以通过测量哈勃常数 H_0 来给出

$$R(0)=D(D-1)H_0^2=12H_0^2$$

常数 λ 就是宇宙临界密度

$$\lambda=\frac{3H_0^2}{8\pi G}=\frac{R(0)}{32\pi G}$$

并注意到标量曲率的 Ricci 流方程为 $\frac{\partial R}{\partial\tau}=-\Delta R-2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$。由于在红外宇观极限 $\tau\to 0$，曲率非常均匀各向同性，因此可以认为 $R_{\mu\nu}(0)=\frac{1}{D}R(0)g_{\mu\nu}$ 并且 $\Delta R(0)=0$，所以方程变成 $\frac{\partial R}{\partial\tau}=-\frac{2}{D}R^2$，其小 τ 解为

$$R(\tau)=\frac{R(0)}{1+\frac{2}{D}R(0)\tau} \tag{115}$$

因此，有效作用量中的前两项其实不是别的，正是（尺度 τ 依赖的）Einstein-Hilbert 项

$$2\lambda-\lambda R(0)\tau=\frac{R(\tau)}{16\pi G}$$

在红外极限下，考虑到红外极限下时空均匀各向同性，u_0 的一般解在红外会退化成经典的均匀密度，因此 Ricci 流的不变体积元 $dV(X)u_0$ 现在退化成通常的坐标不变体积元 $dV(X)\equiv d^4X\sqrt{|g|}$ (25)。这时密度几何 (M^D,g,u) 退化成通常的黎曼几何 (M^D,g)。这样这个有效作用量 (114) 就可以在低能小 τ 的时候，回到一个带有一个宇宙学常数的有效 Einstein-Hilbert 作用量

$$S_{eff}=\int_{M^4} dV(X)\left[\frac{R(\tau)}{16\pi G}+\lambda\nu\right],\quad(\tau\to 0) \tag{116}$$

其中宇宙常数由以临界密度 λ 为单位的紫外抵消项给出

$$\lambda\nu=-\Omega_\Lambda\lambda=\frac{-2\Lambda}{16\pi G}$$

而 $O(-1)$ 的抵消项 $\nu(\mathbb{B}^4_{UV}) \approx -0.8$ (106) 给出一个近似的暗能量和临界密度之间的比例

$$\Omega_\Lambda = -\nu \approx 0.8$$

距离观测值不远。

将 (III D) 中的物质 ϕ 场也包含进这个标架场给出的纯引力有效作用量的时候，相当于半经典近似 (18) 中标架场给出的常数 2λ 项在考虑量子二阶矩涨落的低能 ($\tau \approx 0$) 近似修正后替换成

$$2\lambda \xrightarrow{\text{Ricci 流}} 2\lambda - \lambda R(0)\tau + \lambda\nu = \frac{R(\tau)}{16\pi G} + \lambda\nu$$

因此一个物质 ϕ 场和一个标架场 X 作为时空参考系给出的整个量子系统 (16)，在考虑了标架场的二阶矩涨落的低能近似之后，就回到了标准的 Einstein 引力 + 宇宙学常数 + 物质项的经典作用量

$$S_{eff}[\phi(X), g] = \int_{M^4} dV(X) \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\delta\phi}{\delta X_\mu} \frac{\delta\phi}{\delta X_\nu} - V(\phi) + \frac{R(\tau)}{16\pi G} + \lambda\nu\right] \tag{117}$$

注意到这个引力理论源自量子标架场理论 (69)，其中只包含一个输入参数 $\lambda = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx (10^{-3}\text{eV})^4$，既不是哈勃常数也不是牛顿常数，而是它们的组合。因此我们也看到这个理论避免了一个简单地将量子理论和广义相对论放到一起时会出现的问题，宇宙常数问题：如果简单的在经典层面给广义相对论引入一个宇宙常数，这在量子层面有严重的问题，量子涨落的修正将强烈的影响这一项的稳定性，以至于如果考虑 Planck 能标作为广义相对论的特征能标，那么将和实际观测值灾难性的偏差。现在 λ 作为这个理论的特征能标，宇宙常数或暗能量作为 $O(\lambda)$ 的量级自然的作为重整化抵消项出现了。λ 相比 Planck 能标是非常低的能标，我们不再需要问为什么宇宙学常数相比 Planck 能标这么低，因为 Planck 能标不再是只有牛顿常数的 Einstein 引力的特征能标了。这里也没有量子零点能涨落导致的发散真空能量产生的巨大引力效应和等效原理的冲突的问题，因为在量子标架场的时空中，作为一个一般坐标变换不变的系统（微分同胚反常通过抵消项在实验室系尺度抵消了），时空零点涨落给出的能动张量的期待值 $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ 总是 0 (73) 。错误的得到发散的零点涨落的真空能量，只是因为采用了 Schrödinger 方程的惯性系中的不会涨落的牛顿参数时间，但这个外部的无限精确的经典牛顿时间严格意义上是非物理的。在一个和时钟的选择无关的量子理论中，零点涨落的能量总是消失的。推而广之，在一个一般的量子涨落的时空坐标下都成立的量子理论，零点涨落的能动张量的期待值都将消失，不再贡献到宇宙常数中，真空的能量或者能动张量的最低阶的贡献是一个 $O(\lambda)$ 的常数抵消项。现在这个 $O(\lambda)$ 的宇宙常数是本质上由量子时空标架场的二阶矩涨落的抵消项给出的。换句话说，现在时空标架场的零点涨落消失了，因为观察者也站在一个同样有零点涨落（相对于经典的实验室系）的标架场参考系中，但时空标架场的两点（二阶矩）涨落（贡献的反常 $\tilde{N}$）的抵消给出宇宙常数。而且抵消项的能量如同（量子）等效原理说断言的那样，也贡献时空的加速度和引力效应，产生红移的二阶矩展宽导致的距离-红移关系在红移平方项受到修正，给出时空的加速膨胀，并且等效于一种宇宙常数给出的排斥引力。粗略的说，由于时空在 Ricci 流下，晚期的时空 4-体积是会发生改变的，更严格的说是时空和实验室标准体积的比值，约化体积，是会随着 Ricci 流发生 $O(1)$ 的变化的，而宇宙常数就是这种 $O(1)$ 时空体积变化下对偶的 $O(\lambda)$ 的真空密度的响应 (response)，而这个时空 4-体积 $O(1)$ 的 Ricci 流变化给出宇宙常数和临界密度 λ 的比值 Ω_Λ。到这里，宇宙学常数的问题在上述几方面的意义上可以说是较好较自然的解决了。

E. 星系外围弱引力下的加速度反常

这个理论并不存在一个像 Planck 能标这样的天然的紫外能标，作为理论的唯一的输入常数，特征能标是很低的临界密度能标 λ，这将带来诸多重要的理论后果。理论的特征能标是牛顿常数和哈勃常数的组合，因此紫

外能标可以完全超越 Planck 能标，红外能标也可以低于哈勃能标。当然我们从 (114) 看到如果高能标 τ 比较大的时候，高幂次的贡献 $O(R^n\tau^n)$ 也将开始重要起来，这将超越理论的高斯近似和对 Einstein-Hilbert 引力产生高能非高斯的修正。而在低能标长程尺度，即 τ 比较小的时候，理论 (117) 也将修正经典的 Einstein-Hilbert 理论。从 (114) 可以看到，修正主要来自两方面：（1）一方面是有效宇宙常数作为 Ricci 流的抵消项的效应，（2）另一方面来自星系物质自身加速膨胀带来的额外效应。这两种低能修改引力的效应，对应于在做宇宙学观测，甚至大尺度的星系尺度观测的时候，通常的 Einstein-Hilbert 引力在低能长程也需要被修改。这些低能效应都将和理论的低特征尺度 λ 有关，我们这一节就关注这些对经典引力的低能修改可能带来的效应。我们前面已经看到产生晚期宇观尺度的加速膨胀（等效于宇宙常数）的效应主要就来自（1），我下面还将看到（1）（2）两种效应在星系尺度都会表现出来。

我们知道在太阳系内，甚至距离太阳比较近的水星轨道附近这样的高引力区域，或者应用到比如比较接近旋转星系的发光核心区域这样的高引力区域，一个不带宇宙常数的标准 Einstein-Hilbert 引力是被在非常高的精度下检验的。但是到了旋转星系的边缘，发光重子物质密度变得比较低的区域，通过星系边缘的光谱的多普勒展宽的测量，旋转星系的旋转速度或者向心加速度并没有按照通常牛顿引力或者 Einstein 引力所预料的那样下降，而是旋转速度看起来趋于一个平台，这被称为星系的物质缺失问题，或者加速度反常问题。这个问题正如问题的提法不同，有两种可能的解决方法，一种方法就是认为引力定律在星系边缘的尺度并不需要修改，只是星系中的确有一些不发光因此无法被光学手段观测到，但却贡献引力的所谓“缺失的物质”或者非重子的“暗物质”。另一种方法就是认为星系中的物质的确可以通过光学手段大部分的被看到，只是这些发光的通常的重子物质产生的引力在引力比较弱的地方不再服从牛顿引力或者 Einstein 引力等理论了，而是需要在弱引力或者等效的低加速度的区域被修改，目前研究比较多的是 MOND。

前一种方法是目前的主流观点，认为宇宙中星系周围有成团的冷的暗物质 CDM 构成，加速膨胀是由宇宙常数 Λ 带来的，这构成了所谓的 ΛCDM 的标准宇宙学模型。这个模型能比较成功的拟合大部分的宇宙学观测数据，冷暗物质不仅在星系尺度的旋转曲线反常简单的看起来是需要的，而且在宇宙尺度，比如和给出正确的大尺度结构，并且拟合微波背景辐射重子振荡的声学谱在第二个及其后面更小尺度的振荡峰的时候似乎也是需要的。但是冷暗物质也面对直接测量上的困难，目前最精密的暗物质的直接测量还没有发现任何可能的迹象。在另一方面暗物质的假说也有一些不自然的地方，比如在我们所在的银河系内部，暗物质似乎就没有扮演重要的角色，暗物质似乎只是在银河系边缘起作用。比如观测到的 Tully-Fisher 关系，暗示旋转星系边缘的速度平台的速度只和光学方法观测到的发光的重子物质有关，这个关系后来通过更精确的加入很难被观测到的重子气体的贡献（比如很暗的 21cm 谱线），更精确的满足所谓重子的 Tully-Fisher 关系：在观测弥散很小的程度上，旋转平台速度 v_f 的四次方只和可见的重子物质的质量 M_b 成正比 $v_f^4 \propto M_b$，里面完全不需要暗物质的存在和贡献。相反，在星系的暗物质晕的图像中简单的预测得到的不是旋转速度的四次方，而是三次方，或者需要很不自然的对暗物质分布的假设才能有可能得到观测到的 Tully-Fisher 关系。自然的得到 Tully-Fisher 关系被认为是 MOND 非常成功地方。而且从 MOND 得到的 Tully-Fisher 关系

$$v_f^4 \sim GM_b a_0 \tag{118}$$

拟合的比例系数 a_0 来看（G 为牛顿常数），a_0 是一个在漩涡星系中拟合得到的弥散比较小的以加速度量纲的常数，大约是非常低的宇宙常数 (开平方) 的量级

$$a_0 \approx 1.2 \times 10^{-10} m/s^2 \approx \frac{\sqrt{\Lambda}}{(6 \sim 8)} \tag{119}$$

虽然这个数值是否真的是对所有星系都是普适的还是纯属巧合，还存在一些争议。毕竟在 MOND 的框架内，无法从一个第一性原理出发来得到这个常数及其从牛顿引力到修改引力之间的内插函数的具体形式，由这个内插函数具体的给出，当旋转加速度远高于特征加速度 a_0 的时候理论回到标准的牛顿或 Einstein 引力，而当旋转加

速度远低于特征加速度 a_0 的时候，比如在旋转星系的边缘，或者在那些低亮度低引力的椭圆星系中，牛顿引力被内插函数强烈的修改。MOND 作为一个唯像理论，更多的是扮演了一种牛顿定律出现之前的 Kepler 定律的角色，Kepler 定律背后更基本的牛顿定律还没有被发现。虽然 MOND 本身也存在一些问题，比如只适用于静态的非相对论的引力系统，比如还无法给出动态的"子弹"星团碰撞后看到的可见重子物质质量中心和不可见物质质量中心之间的分离；在应用到宇宙学系统方面也还有一定的问题，比如给出微波背景辐射重子声学振荡的小尺度峰的拟合。但 MOND 在星系尺度引力系统反常的预测的成功不可能完全只是巧合，应该说，我们尚不清楚这些目前 MOND 的问题是真的问题，还是由于 MOND 缺乏一个背后更基本理论的暂时性的问题。如果这个 MOND 的特征加速度 a_0 的确扮演了某种超出通常牛顿引力或者 Einstein 引力之外的重要角色的话，那么 a_0 和 $\sqrt{\Lambda}$ 的这种内在联系无疑向我们提供了统一的看待宇宙加速膨胀和星系加速度反常的可能的线索。而不再像 ΛCDM 模型中那样，宇宙常数 Λ 和冷暗物质是完全不相干的独立引入模型中用于拟合数据的参数。人类世界图像和基础科学的真正进步正是来自这种对统一图形和概念基础的探寻，而不是仅仅满足于拟合观测数据，否则我们总可以用越来越多的本轮去给出太阳系的行星轨道而不会去寻找背后牛顿定律的简单统一的图像。

我们知道在星系旋转速度的测量中，借助的也是光谱。星系谱线的中心值不仅受到哈勃膨胀的整体宇宙学红移，星系旋转远离我们的区域也表现出红移，而旋转靠近我们的区域表现出蓝移，因此对整体被宇宙学红移的星系谱线来说，也同时即有微小的红移也有微小的蓝移，因此谱线也会受到中心值附的红向和蓝向的多普勒展宽。通过测量这种多普勒展宽来测量星系相对于地面实验室系的旋转速度。而从我们的量子时空的图像来看，时空的二阶矩量子涨落展宽导致的谱线的内禀的量子高斯展宽，这个加速度带来的展宽虽然在幅度上无法和多普勒展宽相比，但时空的背景加速度的展宽等效应也会开始贡献到旋转加速度的展宽展宽中去，而且在长程尺度下开始不能忽略了，就像在前面考虑距离-红移关系的时候不能忽略这种谱线的内禀量子展宽带来的等效加速效应一样。当星系内旋转加速度还比较大的时候，这个额外贡献的加速度并不明显。但是当来到星系的边缘，物质密度远低于临界密度 λ 时，这种额外的由光谱内禀展宽贡献的加速度就不能再忽略了。因此我们可以想象谱线内禀量子展宽产生的等效加速膨胀或者宇宙常数的效应要影响到长程尺度星系边缘旋转加速度。

1. 宇宙常数对局部引力和加速度的影响

宇宙常数在不同的坐标系对引力和时空表现出不同但本质相同的影响: 产生额外的加速度贡献，接下来的几节我们就来考虑*嵌入在均匀各向同性的加速膨胀宇宙背景（动态 FRW 宇宙）中的一个局部静态* Schwarzschild *引力（局部静态星系）*，在这个系统中宇宙常数带来的额外的加速度贡献是否足以解释星系外围的旋转加速度反常?

首先，一个和空间坐标无关的方式引进宇宙常数的效应，我们有均匀各向同性的动态 FRW（Friedmann-Robertson-Walker）度规宇宙度规

$$ds^2 = -dt^2 + \mathbf{a}^2(t)\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right) \tag{120}$$

由于 $\frac{\mathbf{a}(t_0)}{\mathbf{a}(t)} \approx \frac{1}{\mathbf{a}(t)} = 1 + z$，红移反映了一个径向膨胀速度

$$z = \frac{\mathbf{a}(t_0)}{\mathbf{a}(t)} - 1 \approx \frac{\dot{\mathbf{a}}(t_0)(t_0 - t)}{\mathbf{a}(t)} \approx \dot{\mathbf{a}}(t_0) r \approx v_r$$

一个正宇宙常数主导的加速膨胀宇宙，根据宇宙学原理，在任何空间点上的观察者也都应该看到一个均匀各向同性的常数背景加速度

$$a_{\text{背景}} \approx \frac{1}{z}\frac{dz}{dt} \approx \frac{1}{H_0(t_0 - t)} \frac{\dot{\mathbf{a}}(t_0) - \dot{\mathbf{a}}(t)}{\mathbf{a}(t)} \approx \frac{\ddot{\mathbf{a}}(t)}{\mathbf{a}(t) H_0} = -q_0 H_0 \approx \sqrt{\Lambda} \tag{121}$$

其中 $q_0 \approx -0.68$ 是背景减速因子。这个导致了在所有空间点看来，比如地球观察者看来，不仅所有星系之间的距离在以背景加速度常数 $a_{背景}$ 相互远离，而且星系物质本身的尺寸也在随着时空网格在以 $a_{背景}$ 加速膨胀。毫无疑问，这个星系均匀各向同性膨胀的背景加速度是会以某种形式贡献到地球观察者看到环绕星系的外围卫星的总加速度中去的，是我们考虑宇宙常数带来的星系加速度反常的重要来源。

另外，对于局部星系质心系的静态观察者看来，Einstein 引力理论有所谓的球对称 Schwarzschild 解

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM_b}{r} + ...\right) dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2GM_b}{r} + ...}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{122}$$

其中 G 是牛顿常数，M_b 是重子物质质量，"..."表示如果由于动态宇宙膨胀带来的超出静态解的修正。

如何从局部非均匀的 Schwarzschild 解连续过渡到大尺度均匀各向同性的背景 FRW 解的问题，本质上是从一种初始时空构型逐渐通过 Ricci 流变形成另一个时空构型的（非微扰的）重整化或粗粒化的过程，类似于从单个原子逐渐过渡到大量原子组成的连续流体的粗粒化过程。这个广义的 Ricci 流过程甚至可能包括局部奇点手术，虽然这里我们可以不考虑奇点手术，因为我们只对奇点之外的引力感兴趣。在这个过程中，Ricci 流逐渐抹掉局部 M_b 主导的 Schwarzschild 解的非均匀性，从而时空越来越趋于均匀各向同性的 GSRS 极限构型，即一个 FRW 背景度规。如果初始时空构型是和宇宙常数主导的 FRW 是等价的流极限 GSRS 构型（比如 Schwarzschild-deSitter 构型），那么这个 Ricci 流过程退化成仅仅只是等熵的坐标变换过程。

重整化的过程会影响到局部的动力学，宇宙常数作为重整化抵消项也会影响到局部引力系统，我们就是要找到这个重整化过渡过程中的内插度规和内插加速度，来和 MOND 比较。但值得指出的是，我们看到"加速度"的概念在局部静态牛顿引力系统和动态的 FRW 宇宙中，表面看起来有不同的表现和含义：在静态引力中加速度间接的来源于引力势 $\frac{GM_b}{r}$ 的空间梯度，而在动态 FRW 背景中，加速度是对背景膨胀速度 $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ 的时间导数。使得非协变的加速度的概念在不同坐标系表现得很不一样。加速度的非协变性质使得我们很难坐标无关的去研究加速度从局部引力坐标系逐渐连接到 FRW 宇宙背景坐标系的连续过渡问题，及其宇宙学常数在这个过程中的效应。要协变（坐标无关）的考虑宇宙常数 Λ 对局部 Schwarzschild 度规的影响，需要通过协变的物理量并在作用量层面去讨论。要寻找类似 MOND 的加速度内插函数，本质上需要理论从局部静态引力逐渐连续过渡到星系外围的宇宙学环境，去考虑这两个坐标系上某种协变且反映加速度的效应的连续过渡函数，进而去和 MOND 的非协变加速度的内插函数对比。一个合适的协变概念是曲率，即考虑曲率从局部引力系统到由宇宙常数带来的加速膨胀的宇宙学背景的连续过渡，而不是像 MOND 那样考虑坐标依赖的加速度的连续过渡。

我们考虑协变的有效作用量 (114) 或 (117)

$$S_{eff} = \int d^4X \left[\frac{R(\tau)}{16\pi G} + \lambda\nu + \mathcal{L}_M\right]$$

其中 $d^4X \equiv dX^0 dX^1 dX^2 dX^3 \sqrt{|g|}$ 是不变体积元的简写。我们来看，宇宙常数 $\lambda\nu = -\frac{\Omega_\Lambda H_0^2}{8\pi G}$ 的效应是如何进入到局部引力系统（比如星系）中去的。首先考虑到 $\lambda = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \frac{R(0)}{32\pi G}$，我们可以将这个有效作用量写成

$$S_{eff} = \int dV(X) \left[2\lambda\left(\frac{R(\tau)}{R(0)} - \frac{\Omega_\Lambda}{2}\right) + \mathcal{L}_M\right] = \int dV(X) \left[2\lambda\frac{R(\tau)}{R(0)}\left(1 - \frac{\Omega_\Lambda}{2}\frac{R(0)}{R(\tau)}\right) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\tau_0)T_{\mu\nu}(\tau_0)\right] \tag{123}$$

这样时空和引力部分以特征能量密度 2λ 为单位，圆括号中都是无量纲的曲率比值：长程星系尺度 τ 的标量曲率和渐近红外背景曲率之比 $R(\tau)/R(0)$。另外在物质拉氏密度部分，物质的能动张量是通过在短程实验室尺度 τ_0 下的光学定律进行校准和间接测量的，因此 $\tau_0 > \tau$，能动张量是与物质共动坐标系下 τ_0 尺度的时空度规耦合。虽然在同一个作用量中出现了两个不同的 Ricci 流尺度 τ 和 τ_0，但物质部分可以通过 Ricci 流将不同尺度的度规联系起来，最后可以把整个有效作用量在同一个 Ricci 流尺度 τ 下写出来。

从这个有效作用量，我们很容易看到当引力比较强的时候，即 $R(\tau) \gg R(0)$，比如在星系发光物质中心区、太阳系等，宇宙常数部分 $\frac{\Omega_\Lambda}{2}$ 的贡献是可以忽略的，回到精确检验的 Einstein 引力和牛顿引力。当在低能长程

的星系尺度 $\tau \to 0$，标量曲率 $R(\tau)$ 可能低到能和渐近的背景哈勃曲率 $R(0)$ 量级相当，因此这时括号中第二项宇宙常数 $\frac{\Omega_\Lambda}{2}$ 就不再能忽略了，但由于 $\frac{\Omega_\Lambda}{2} \approx 0.35$ 相比 1 还是小量，我们可以把宇宙常数当作一个小量展

$$
\begin{aligned}
S_{eff} &\approx \int dV(X) \left[2\lambda \frac{1}{R(0)} \frac{R(\tau)}{\left(1+\Omega_\Lambda \frac{R(0)}{R(\tau)}\right)^{n/2}} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(\tau_0) T_{\mu\nu}(\tau_0) \right] \\
&= \int dV(X) \left[\frac{1}{16\pi G} \frac{R(\tau)}{\left(1+\Omega_\Lambda \frac{R(0)}{R(\tau)}\right)^{n/2}} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(\tau_0) T_{\mu\nu}(\tau_0) \right], \quad (R(\tau) \gtrsim O(R(0)))
\end{aligned}
\tag{124}
$$

其中 n 从 $1 \sim 2$ 大致都是不错的近似，也都能给出不错的观测拟合，为了更好的和 MOND 的内插函数对比，后面我们都选 $n = 1$。如同在通常星系等局部引力系统中考虑的那样，现在有效作用量中物质 $\mathcal{L}_M$ 对时空曲率 $R(\tau)$ 的影响还是主导的，而相比之下，宇宙常数这时被看作一个相对小量。于是这个展开，就对时空曲率 $R(\tau)$ 做了一个有效的修正和替换

$$
R(\tau) \to \frac{R(\tau)}{\sqrt{1+\Omega_\Lambda \frac{R(0)}{R(\tau)}}} \tag{125}
$$

通过这种方式，我们就将宇宙常数的效应有效的放进了局部时空曲率和局部引力系统中，给出（1）的效应；另一方面通过 Ricci 流将短程实验室尺度 τ_0 的物质部分写成长程星系尺度 τ 时，给出了（2）效应。(124) 作为我们研究星系等，特别是在能量密度比较低，引力比较弱 (当 $R(\tau) \gtrsim O(R(0))$) 的局部引力系统的出发点。

非相对论极限 对于物质部分，如果我们考虑的是静态的（非相对论的）星系的物质分布 [8]，而且这些物质都是可见的物质，那么它们的能动张量的分量为

$$
T_{00} = \rho_M, \quad T_{ij} \approx 0, \quad (i,j = 1,2,3) \tag{126}
$$

这些可见物质的密度是在短距离的实验室标准尺度 τ_0 下的光学方法校准和间接测量的，因此和这些能动张量耦合的局部时空度规 $g^{\mu\nu}(\tau_0)$ 也是在短距离的实验室标准尺度 τ_0

$$
\mathcal{L}_M \approx \frac{1}{2} g_{00}(\tau_0) T_{00} = \frac{1}{2} g_{00}(\tau_0) \rho_M
$$

考虑在长程星系尺度 τ 的牛顿势 $\Phi(\tau)$，在弱引力 $\Phi \ll 1$ 和静态（非相对论极限）$\dot{\Phi} \approx 0$ 下度规可以写成

$$
g_{00}(\tau) \approx -(1 + 2\Phi(\tau)), \quad g_{ij} = (1 - 2\Phi(\tau))\,\delta_{ij}
$$

由度规的 Ricci 流方程 $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = -2R_{\mu\nu}$ 我们可以将实验室标准尺度 τ_0 的度规和长程星系尺度的度规联系起来

$$
g_{00}(\tau) = \left[1 - \frac{1}{2} R(\tau_0)(\tau_0 - \tau)\right] g_{00}(\tau_0) \equiv \Upsilon g_{00}(\tau_0)
$$

其中我们定义一个经常出现的重整化因子 Υ

$$
\Upsilon \equiv 1 - \frac{1}{2} R(\tau_0)(\tau_0 - \tau)
$$

所以短程实验室尺度的物质拉氏密度写成了长程星系尺度的形式

$$
\mathcal{L}_M \approx \frac{1}{2} g_{00}(\tau_0) \rho_M = -\frac{1}{2}(1 + 2\Phi(\tau))\,\Upsilon \rho_M \tag{127}
$$

于是整个在长程星系尺度的有效作用量就可以写成

$$
S_{eff}(\tau) \approx \int dV(X) \left[\frac{1}{16\pi G} \frac{R(\tau)}{\sqrt{1+\Omega_\Lambda \frac{R(0)}{R(\tau)}}} - \frac{1}{2}(1 + 2\Phi(\tau))\,\Upsilon \rho_M \right] \tag{128}
$$

到这里为止的上面的处理都是协变的，在任何坐标系下都成立。在非相对论极限下，标量曲率也可以通过非协变的牛顿势来写出来，包括领头阶的 $\Delta\Phi$，以及第二阶的比如 $(\nabla\Phi)^2$ 和 $\Phi\Delta\Phi$ 等项。要通过 Lagragian-Euler 方程导出这个作用量的经典场方程去和牛顿势的泊松方程比较，重要的项是那些线性项，而 $\Delta\Phi$ 项对经典场方程并不重要。另外 $\Phi\Delta\Phi$ 项在相差一个全微分的程度上就归结到类似 $(\nabla\Phi)^2$ 的项。在线性阶层面，标量曲率最后可以被替换成非协变的特定坐标系中的加速度

$$R(\tau) \to 2|\nabla\Phi(\tau)|^2 = 2a^2 \tag{129}$$

从另一个角度我们可以这样看，其实观察到

$$R = g^{\mu\nu}R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} - \partial_\alpha\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) - 2\mathcal{R}$$

其中

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}, \quad \mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\gamma} - \Gamma^{\gamma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\gamma}\right)$$

是 Ricci 曲率中度规一阶导数的部分给出的（非标量）曲率，是一个非协变的量。由于

$$\sqrt{|g|}R = 2\sqrt{|g|}\mathcal{R} + \text{全散度}$$

在静态弱场近似 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2\Phi\delta_{\mu\nu}, (\Phi \ll 1, \dot{\Phi} = 0)$ 下，

$$R \overset{\text{差全微分}}{\approx} 2\mathcal{R} \overset{\text{弱场}}{\approx} \frac{1}{4}\left[\partial^\gamma h^{\nu\rho}\left(\partial_\gamma h_{\nu\rho} - 2\partial_\rho h_{\nu\gamma}\right) - \partial^\gamma h\left(\partial_\gamma h - 2\partial_\rho h^{\rho}_{\gamma}\right)\right] = 2|\nabla\Phi|^2 \equiv 2a^2 \tag{130}$$

其中 $h = h^{\mu}_{\mu}$，指标抬升和下降都通过 $\eta_{\mu\nu}$。因此我们在静态弱场近似下，可以把标量曲率替换成非协变的总加速度 $2a^2$，在相差一个全微分的程度上，不会影响给出的运动方程。当然这个非协变量由于和坐标系选择有关，因此并不是唯一的。从协变的曲率转变成了非协变加速度的基础上，实现类似 MOND 行为，这某种程度上避免的 Soussa-Woodard 的 no-go 定理。

当曲率对应成加速度来考虑之后，因此现在大致有 3 种加速度之间的竞争关系来决定加速度的行为。一个就是由重子物质决定的牛顿加速度 $a_N = \frac{GM_b}{r^2}$，一个是 (119) 由宇宙常数对应的特征加速度常数 a_0，和背景时空加速膨胀的加速度 $a_{\text{背景}}$ 相差数倍关系，另一个就是和星系半径 r 成正比的星系自身的膨胀加速度 $a_E(r) = H_0^2 r$（我们在后面讨论）。这 3 种加速度在不同的区间相互竞争产生对总的加速度 a 和旋转加速度 a_D 的贡献。在星系可见半径之内 $r < r_{\text{星系}} \sim 10\text{kpc}$，主要是牛顿引力主导 $a_N \gg a_0 \gg a_E(r)$，就是标准的牛顿极限；在星系外围 $r_{\text{星系}} < r < r_c \sim r_S^{1/3} r_H^{2/3}$，（$r_S = 2GM_b$ 是星系的 Schwarzschild 半径，r_H 是哈勃半径），由于牛顿加速度逐渐降低到了 $a_{\text{背景}}$ 的量级，背景加速度 $a_{\text{背景}}$ 的贡献和修正开始重要了，但星系自身膨胀加速度还比较小，称为低加速度区间 $a \gtrsim O(a_0) \gg a_E$；在距离星系比较远的 $r_c < r$，称为极低加速度区间 $a_N \ll a_E \lesssim O(a_0)$，这时星系膨胀的加速度 a_E 开始需要被考虑了。可以简单的写成

$$\begin{cases} \text{牛顿极限}: a_E \ll a_0 \ll a_N & (r < r_{\text{星系}} \sim 10\text{kpc}) \\ \text{低加速度区间：} a_E \ll O(a_0) \lesssim a & (r_{\text{星系}} < r < r_c) \\ \text{极低加速度区间：} a_N < a_E \lesssim O(a_0) & (r_c < r < r_H) \end{cases}$$

2. 低加速度 $a_E \ll O(a_0) \lesssim a$ 区间的渐近加速度偏离趋势

下面我们考虑，当星系卫星的总加速度 a 在星系边缘 $r_{\text{星系}} \sim 10\text{kpc}$ 的时候逐渐低到接近 $O(a_0)$，由于宇宙常数或 a_0 的影响，总加速度 a 开始明显偏离牛顿加速度 a_N 了，但在星系边缘半径，星系自身的膨胀加速度

$a_E = H_0^2 r_{星系}$ 相比背景加速度 a_0 还比较小。因此我们先忽略加速度 a 中星系自身的膨胀加速度 a_E 的部分，我们来考虑 R 对应的总加速度 a (129) 和牛顿加速度 a_N 的偏离。这个渐近偏离趋势可以在 $a \gtrsim O(a_0)$ 区间大致给出 MOND 的行为，但无法给出更低加速度时的行为。对于当牛顿加速度 a_N 加速度比 a_0 小很多，而不能忽略星系自身跟随时空膨胀加速度 a_E 的情形，我们在后一节 (VI E 3) 再讨论。

通过曲率到加速度的代换关系 (130)，从 (128) 和 (129) 我们得到低加速度区间 $a \gtrsim O(a_0)$ 或 $|\nabla\Phi(\tau)| \gtrsim O(H_0)$，关于静态引力势 Φ 的有效作用量为

$$S_{eff}(\tau) \approx \int dV(X) \left[\frac{1}{8\pi G} \frac{|\nabla\Phi(\tau)|^2}{\sqrt{1+\frac{2\Lambda}{|\nabla\Phi(\tau)|^2}}} - \frac{1}{2}\left(1+2\Phi(\tau)\right) \Upsilon \rho_M \right], \quad (|\nabla\Phi(\tau)| \gtrsim O(H_0)) \tag{131}$$

牛顿极限 相比标准牛顿引力的作用量，这个有效作用量由两处额外的修正因子，一个是宇宙常数作为相比物质的小量贡献了因子 $\left(1+\Omega_\Lambda \frac{6H_0^2}{|\nabla\Phi(\tau)|^2}\right)^{-1/2}$ 修正了牛顿势的梯度平方项；另一个因子 $\Upsilon \equiv 1 - \frac{1}{2}R(\tau_0)(\tau_0-\tau)$ 是 Ricci 流内插了连接短程标准实验室尺度和长程星系尺度的牛顿势。因此我们能看到当宇宙常数相比物质可以忽略，另外尺度差 $\tau_0 - \tau \approx 0$ 比较小的时候 $\Phi(\tau) \approx \Phi(\tau_0) \approx \Phi_N$，这两个修正因子都近似为 1

$$S_{eff} \overset{牛顿}{\approx} \int dV(X) \left[\frac{|\nabla\Phi_N|^2}{8\pi G} - \frac{1}{2}\left(1+2\Phi_N\right)\rho_M \right], \quad (|\nabla\Phi_N(\tau)| \gg O(H_0)) \tag{132}$$

在 $a_N \gg a_0 \gg a_E$ 的区间，回到牛顿引力极限给出的泊松方程

$$\Delta\Phi_N = 4\pi G \rho_M$$

加速度内插函数和偏离趋势 作用量 (131) 的引力部分的拉氏密度重新写成

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{2\Lambda}{8\pi G} \frac{|\nabla\Phi(\tau)|^2}{2\Lambda} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\Lambda}{|\nabla\Phi(\tau)|^2}}} = \frac{\Lambda}{4\pi G} F(x), \qquad \left(x = \frac{|\nabla\Phi(\tau)|^2}{2\Lambda}\right)$$

就给出了从牛顿引力极限连续过渡到低加速度区间 $a \gtrsim O(a_0) \gg a_E$ 或 $|\nabla\Phi(\tau)| \gtrsim O(H_0)$ 的内插拉氏密度，其中

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^{-1}}} = \begin{cases} x & x \gg 1, \quad (\text{牛顿极限}) \\ x^{3/2} & x \ll 1, \quad (\text{渐近 deep-MOND 极限}) \end{cases}$$

但值得指出的是由于 (131) 的近似条件是 $|\nabla\Phi(\tau)| \gtrsim O(H_0)$，因此这个内插函数无法真正达到 deep-MOND 极限 $|\nabla\Phi(\tau)| \ll O(H_0)$ 或 $a \ll O(a_0)$，只能在曲率比较低 ($R(\tau) \gtrsim O(R(0))$ 的时候给出了一种偏离牛顿引力的趋势（见图 2 在 $a \gtrsim O(a_0)$ 的黑实线）和 $a \gtrsim O(a_0)$ 区间的数据点（红虚线）比较接近。

对于这个内插函数 $F(x)$ 和 MOND 的比较，我们注意到现在实际上有效作用量 (128) 中是局部引力系统的曲率 $R(\tau)$ 和渐近背景曲率 $R(0)$ 之比 $R(\tau)/R(0)$，或非协变的比值 $|\nabla\Phi(\tau)|^2/2\Lambda$，扮演了 MOND 的加速度比 $(a/a_0)^2$ 的角色，如果我们取旋转加速度 $a = |\nabla\Phi(\tau)|$ 同时取临界加速度为

$$a_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2\Lambda} \tag{133}$$

那么内插拉氏密度就和非相对论推广的 MOND 的内插拉氏密度一样了

$$\mathcal{L}_{MOND} = \frac{a_0^2}{4\pi G} \frac{a^2/a_0^2}{\sqrt{1+\frac{9}{4}\frac{a_0^2}{a^2}}} = \frac{a_0^2}{4\pi G} f(y), \quad \left(y = \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{|\nabla\Phi(\tau)|^2}{a_0^2}\right) \tag{134}$$

其中

$$f(y) = \frac{y}{\sqrt{1+\frac{9}{4}y^{-1}}} = \begin{cases} y & y \gg 1, \quad (\text{牛顿极限}) \\ \frac{2}{3}y^{3/2} & y \ll 1, \quad (\text{渐近 deep-MOND 极限}) \end{cases}$$

这里和 MOND 对比得到的加速度常数 $a_0=\frac{2}{3}\sqrt{2\Lambda}$ 已经有了正确的量级 $O(\sqrt{\Lambda})$，但和 Tully-Fisher 关系拟合得到的 a_0 还相差了若干倍的系数，这个具体的系数在下文中被归结到 Ricci 流的高阶修正。

总加速度下限 在重子物质密度 ρ_M 远低于临界密度 λ,（或者等效的考虑很低的重子物质对应的相对于星系质心系的牛顿加速度 $a_N\to 0$ 的极限）的时候，我们无法再基于近似条件 $R(\tau)\gtrsim O(R(0)$，需要回到初始作用量 (123)，我们看到在 $R(\tau)$ 比较小的时候，为了保证重子物质给出的有效曲率 $R(\tau)-2\Lambda$ 是正的，$R(\tau)$ 最小只会小到一个与宇宙常数 Λ 相关的常数。如果我们忽略星系自身的膨胀，假定星系满足泊松方程，其对应的作用量 (132) 和 Einstein-Hilbert + 宇宙常数 作用量比较，就可以有效的把牛顿加速度写成

$$\frac{1}{2}\left(R(\tau)-2\Lambda\right)\equiv\frac{1}{2}R_{eff}\approx|\nabla\Phi_N|^2=a_N^2 \tag{135}$$

于是在物质密度很低 $\rho_M\to 0$ 或有效的 $a_N\to 0$ 时，导致了一个和宇宙常数联系的普适的曲率 $R(\tau)\to 2\Lambda\sim O(R(0))$，如果 $a(\tau)^2=|\nabla\Phi(\tau)|^2\sim\frac{1}{2}R(\tau)$，因此也导致了相对星系质心系的加速度下限 $a\sim\sqrt{\Lambda}$，因此这个普适的加速度下限可以看作和普适宇宙背景加速膨胀联系。(见图 2 黑实线有一个下限)。

这个总加速度下限的现象和 MOND 不同（在 MOND 中星系的旋转加速度能在非常低的加速度 $a_N\to 0$ 达到 deep-MOND 极限，这时星系自身随空间共动膨胀的加速度已经不能忽略了，见下一节）。但这个总加速度一定程度上混合了旋转加速度和随空间共动膨胀的加速度，如果不是很容易区分这二者，的确有一些观测迹象可能暗示了这种可能存在的加速度下限（见图 1），比如对于一些没有明显整体转动的超暗的球形矮星系（ultrafaint dSphs）的数据，似乎偏离 MOND 的预测。尽管拟合到的加速度下限平台大约是 $(9.2\pm 0.2)\times 10^{-12}m/s^2$，比宇宙常数 $\sqrt{\Lambda}$ 小一个量级。对这个偏差一个可能的解释是，从曲率到加速度的转变，需要考虑到 Ricc 流效应给出的额外的重整化因子 $\Upsilon^{3/2}$。其中 Υ 因子根据拟合加速度下限的范围或加速度常数 a_0 的范围，近乎需要取一个常数

$$\Upsilon\equiv 1-\frac{1}{2}R(\tau_0)\left(\tau_0-\tau\right)\approx(0.13\sim 0.18) \tag{136}$$

$\Upsilon^{3/2}$ 中的 Υ^1 部分来自于对物质和引力势耦合的重整化 (见 127)，$\Upsilon^{1/2}$ 部分来自于对 $\sqrt{\Lambda}\sim\sqrt{R_{\text{背景}}}$ 的重整化 (见 115)，这个普适的观测加速度下限可以修正为和拟合比较接近的数值 $a_{min}\approx\Upsilon^{3/2}a_{\text{背景}}\approx\Upsilon^{3/2}\sqrt{\Lambda}\approx O(10^{-11}m/s^2)$。

Ricci 流重整化因子 Υ 的可能含义 如果重整化因子近乎是一个常数，而且 $R(\tau_0)\left(\tau_0-\tau\right)=2\left(1-\Upsilon\right)\approx(1.64\sim 1.74)$ 取一个 $O(1)$ 的数值。我们粗略的给 Υ 近似是一个常数这个现象一些可能的解释。

首先，由于 Einstein 方程的迹在重子物质 (126) 下的形式 $R=-8\pi GT^\mu_\mu=8\pi G\rho_{\text{重子}}$，我们看到 Ricci 流在不同尺度之间曲率变化，有效的带来重子物质密度在不同尺度之间的“缺失”，即 $\Delta R=8\pi G\Delta\rho$。当从短程实验室尺度 τ_0 演化到长程（星系或宇观）尺度 τ，

$$\Delta R=R(\tau)-R(\tau_0)=\frac{R(\tau_0)}{1-\frac{1}{2}R(\tau_0)\left(\tau_0-\tau\right)}-R(\tau_0)=R(\tau_0)\left(\Upsilon^{-1}-1\right)=8\pi G\Delta\rho$$

其中 $\Delta\rho=\rho(\tau)-\rho_{\text{重子}}(\tau_0)$ 是长程星系尺度比短程实验室尺度看起来“多出来”的物质密度，或者说经典 Einstein 理论中“缺失”的物质密度。利用短程实验室尺度的 Einstein 方程 $R(\tau_0)=8\pi G\rho_{\text{重子}}(\tau_0)$，我们得到

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_{\text{重子}}(\tau_0)}=\Upsilon^{-1}-1\approx(4.6\sim 6.7)$$

即这个 Ricci 流重整化因子等价于说，经典 Einstein 理论缺失的“不可见物质密度”$\Delta\rho$ 是可见的重子数密度 $\rho_{\text{重子}}(\tau_0)$ 的大约 $4.6\sim 6.7$ 倍，这个比例大致上符合宇宙学中给出的不可见的暗物质大约是重子物质密度的 5 倍。同时我们看到由于标量曲率 Ricci 流的单调性，这种缺失的物质密度 $\rho(\tau)$ 也是随着 Ricci 流流向长程尺度单调增加的，也就是所有星系中 $\Delta\rho>0$，看起来重子物质总是少于标准引力需要的物质，这点与观测也是符合的。从这个理论的角度看，完全可能所谓的缺失的暗物质只是由于时空的 Ricci 流产生的曲率变化产生的假象。

只要时空的 Ricci 流是真实发生的，那么这种类型的“暗物质”在宇宙尺度就是不可避免的。但这种类型的“缺失物质”是否足够解释微波背景辐射重子振荡谱中从第三个共振峰开始表现出来的重子物质缺失，还尚不清楚。

其次，当然这个重整化因子在这里原则上并不严格是常数，应该依赖于星系具体的 Ricci 流尺度 τ。根据我们对 Ricci 流尺度的物理解释，这是物质标架场参考系的截断能标，代表着测量星系时空坐标的粗粒化程度。在通常的宇宙学星体和星系的观测中，可用的标架场其实是观测的光谱，星系的光谱相比实验室测量到的对应光谱，被红移到低频长波区域，并伴随有近乎和红移线性关系的高斯展宽 (110)，这些因素都带来了我们对越是遥远越是大红移的星系的能量或时空坐标测量精度就越是粗粒化。但为什么大多数星系似乎近乎有一个普适的 a_0 呢？当然一个可能的原因是对于星系的观测都处在差不多量级且很小的红移和差不多量级的光度 (对应于差不多量级的物质曲率)。我们也注意到在 Ricci 流的过程中的确存在一种特殊的情形，其中标量曲率和尺度差的乘积近乎是常数的。那就是在 Ricci 流的过程中，如果在有限 Ricci 流尺度 t_*，局部形成高曲率区域甚至局部奇异性，那么这些局部区域的时空构型就近乎梯度收缩 Ricci 孤立子（GSRS）构型，满足 GSRS 方程 (94)。从 GSRS 方程 $R(t)=\frac{D}{2(t_*-t)}$，我们看到，将这些局部时空区域做逆流从 t_* 到 t，由于 GSRS 时空构型的自相似性，在逆流过程中这些局部时空构型的曲率和逆流尺度差的乘积 $R(t)(t_*-t)=\frac{D}{2}=2$，和我们的结果比较接近。局部的星系所处的尺度 τ 如果非常接近奇异性的尺度 t_*，那么它们就类似扮演了时空局部高曲率的区域，当从这个近乎奇异性的长程星系尺度 τ 逆流到短程实验室尺度 τ_0 的过程中，$R(\tau_0)(\tau_0-\tau)$ 近乎 $O(1)$ 的常数。这些区域近乎自相似的 GSRS 构型的确是一种可能的机制带来一个近乎常数的 a_0。不仅在宇宙学均匀各向同性的大尺度下 (104) 是自相似的 GSRS，而且在星系尺度局部时空构型也是近乎自相似的也是非常可能的。要检验这种可能解释的正确性，需要对更多星系的 a_0 值做更精确的拟合。a_0 是否对所有星系都是普适的这一点目前还存在很多争议，也存在一些测量和估计上的不确定性。目前的确也存在一些尚未清楚的对普适 a_0 的可能偏离（比如对于超暗的球状矮星系）。对宇宙学尺度上的自相似性也存在一定的争议。这方面的结论还有待对 Tully-Fisher 关系更进一步更精确的观测和更多的数据积累。

如果 Ricci 流导致星系的重子物质外围的引力构型类似一个 GSRS 构型，那么这个图像也就给了一种“暗物质晕”分布的可能的理论，虽然这过于推测性了，但一定程度上也很有启发性。如同一个热方程逐渐将不均匀的温度分布逐渐变得均匀，将热量传导到更冷的地方。Ricci 流过程也将逐渐将星系不均匀的可见物质逐渐变得均匀，比如将一个薄盘状非各向异性分布的可见重子物质的盘星系，经过 Ricci 流的演化之后，逐渐变成一个各向同性的球状分布的“暗物质晕”；将物质比较集中的非平坦的度规“热传导”到物质较少的较平坦的空间，得到一个比可见物质星系大得多的暗物质晕。直到最后星系周围的度规分布满足时间静态的 3-空间 GSRS 的流极限方程（类比于热平衡态的温度分布方程，Laplacian 方程），使得可见重子物质周围很大的空间中好像存在不可见的暗物质晕。在这个图像下，GSRS 的 3-空间分量方程 $R_{ij}=\frac{1}{2(t_*-t)}g_{ij}$ 给出了星系周围空间的度规分布以及暗物质晕的分布。如果将三维空间的曲率 R_{ij} 线性化我们得到三维空间的 Helmholtz 方程 $\left(\Delta+\frac{1}{t_*-t}\right)g_{ij}\approx 0$，其中短程实验室尺度和长程星系尺度差给出的 $\sqrt{t_*-t}$ 扮演了暗物质晕的特征半径的角色，这个特征半径将比可见星系的特征半径大很多。这个现象也非常类似于重整化导致的真空极化电荷将逐渐的屏蔽自由电荷的不均匀和各向异性，使得整体的电荷分布趋于均匀和各向同性（满足均匀各向同性静电场的泊松方程或者 Laplacian 方程）。而暗物质晕就类似的扮演了极化电荷的角色，逐渐在大尺度“屏蔽”了可见物质分布的不均匀和各向异性。

总结一下，我们看到，宇宙常数对局部引力系统的这个影响支持了一种看待 MOND 渐近转变趋势的简单图像，即在低加速度区间 $a\sim(10^{-11}\sim 10^{-9})m/s^2\gtrsim O(a_0)$（而不是远低于）能得到渐近类似 MOND 的偏离牛顿加速度的趋势，其实只是将宇宙学常数引进标准的 Einstein-Hilbert 引力理论产生的结果，更严格的说是，产生宇宙常数的等效背景展宽/等效背景加速度对局部星系旋转加速度产生了额外的加速度贡献，带来一个领头阶的牛顿加速度偏离。

3. 极低加速度 $a_N < a_E \lesssim O(a_0)$ 区间的加速度偏离行为

前面我们仅仅考虑到宇宙常数对局部引力系统中的曲率的修正，在总加速度 $a \gtrsim a_{背景} \sim O(a_0)$，近似忽略总加速度 a 中星系自身膨胀加速度 a_E 的部分（非膨胀星系），就足够得到一个和 MOND 接近的偏离牛顿加速度的渐近行为 (134)（图 2 黑色实线）。但这个处理无法延伸至更低的旋转加速度，而受到有效加速度下限的限制。这个有效加速度下限的物理含义是，就算旋转加速度趋于零了，在地球观察者看来，总加速度还会剩余一个星系自身跟随空间共动膨胀的加速度。正是这个星系自身的膨胀加速度阻止了曲线继续向更低旋转加速度延伸，我们需要将其从总加速度中适当区分。这种引力源的自身膨胀反过来又会修改引力本身，是一种宇宙常数带来的次级效应，这种次级效应虽然预期很小，但由于在静态质心系观察者看来，星系物质的膨胀加速度和星系半径成正比，因此在星系外围很大半径，引力非常弱的时候，也开始变得重要起来。因此对更低的加速度时，有效加速度中星系自身膨胀的加速度是不能忽略了。我们在这一节中就来考虑，星系自身膨胀 a_E 在什么时候开始重要起来，以及在极低的加速度区间如果要产生 Milgrom 给出的 deep-MOND 的行为，我们看到星系自身膨胀的效应就必须考虑了。

对于在膨胀宇宙中的局部引力系统（比如星系和太阳系）是否也在随之膨胀，一直是一个广泛争议的问题，虽然物理学家们知道宇宙的膨胀会影响到所有尺度的物质，但究竟定量的在什么尺度，这种宇宙膨胀的效应开始变得重要而不能忽略的问题上是有所争议的。我们将在这一节中看到，在星系外的某个大半径尺度，如果考虑了星系自身加速膨胀，能改善图 2 黑色实线对测量数据点 (图 2 红线) 的拟合，更好的接近 deep-MOND 极限的行为 (图 2 黑色虚线)。

我们下面考虑，星系自身在做加速膨胀不能忽略的时候，那么地球观察者（FRW 宇宙中空间所有点上）看到的星系旋转加速度 a_D 和牛顿加速度 a_N 的偏离。如果考虑了星系自身膨胀动能，那么引力势就不再简单是牛顿势了，还应该包含导致空间膨胀的某种宇宙常数相联系的“外场势能”。只要位力 (virial) 平衡仍然成立，那么就算在 FRW 背景中不容易直接写出这个“外场势能”的具体形式，我们也可以这样简单的考虑这个问题，即只要将加速度从上一节 (135)（忽略自身膨胀的静态的）牛顿引力加速度 a_N 相应的替换成（嵌入在 FRW 背景中考虑星系自身膨胀的）有效的旋转加速度 a_D，那么两种势能的效应都综合包含在内了，

$$\frac{1}{2}\left(R(\tau)-2\Lambda\right) \equiv \frac{1}{2}R_{eff} \approx |\nabla\Phi_{eff}|^2 = a_N^2 \to a_D^2 \tag{137}$$

a_D 的下标“D”表示地球观察者（也就是 FRW 宇宙中空间所有点上）通过 Doppler 谱线展宽有效的测量旋转速度 $\mathbf{v}_{旋转}$ 后反推得到的有效旋转加速度。在一般星系既有自身膨胀加速度 a_E，也有时空背景膨胀加速度 $a_{背景}$ 的时候，由于位力 (virial) 平衡，从加速度角度看，a_D 就体现了静态 a_N、外场背景 $a_{背景}$ 和膨胀 a_E 的综合效应，因此 $a_D(a_N, a_{背景}, a_E)$ 和 a_N 一般就不再相等了，$a_D = \frac{\mathbf{v}^2_{旋转}}{r} \overset{(a_E, a_{背景})}{\neq} a_N$。

由于质心系看到星系物质作用量不再形如静态近似 $-\mathcal{L}_M \approx \frac{1}{2}\left(1+2\Phi_N\right)\rho_M$，即 (127)，而是考虑到星系物质不仅在绕质心旋转，星系自身也在做加速膨胀，于是相对于星系质心系，星系物质有一个旋转速度 $\mathbf{v}_{旋转}$（这里以漩涡星系为例，如果是一些没有整体转动的非漩涡星系，比如椭圆星系，旋转速度可以换成随机运动速度）和沿星系径向 r 的各向同性的膨胀速度 $\mathbf{v}_{膨胀}$ 的贡献，共同给出星系物质的速度 $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^2_{旋转} + \mathbf{v}^2_{膨胀}$。因此原来相对于时空背景的非相对论牛顿引力势 $\Phi_N = -\frac{GM_b}{r}$ 要替换成

$$\Phi_N \to \Phi = \Phi_N + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + ... = -\frac{GM_b}{r} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{v}^2_{旋转} + \mathbf{v}^2_{膨胀}\right) + ... \tag{138}$$

即 $-\mathcal{L}_M \to \frac{1}{2}\rho_M + \frac{1}{2}\rho_M\mathbf{v}^2 + \rho_M\Phi_N + ...$，相当于 (负的) 引力势能 $\Phi_N = -\frac{GM_b}{r}$ 还要再加上星系物质的非相对论动能 $\frac{1}{2}\rho_M\mathbf{v}^2$。这也可以等价的解释成，在引力势的时间膨胀的基础上还要考虑运动速度产生的相对论性时间膨胀效应（到 $O(c^{-2})$ 阶），只是一个经典效应。

从这个意义上，局部静态 Schwarzschild 空间度规在大半径（$\Phi_N \to 0$ 并且星系本动旋转相对膨胀速度可忽略），那么地球观察者和星系质心的观察者将都看到星系的半径在随着宇宙背景以 $\mathbf{v}_{\text{膨胀}} \approx z$ 的速度在共动膨胀，于是

$$g_{rr} = \frac{1}{1-2\left(\Phi_N + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)} \overset{\text{大半径}}{\to} \frac{1}{1+\mathbf{v}^2_{\text{膨胀}}} \approx \frac{1}{1+z^2} \approx \frac{1}{(1+z)^2} = \mathbf{a}^2 \tag{139}$$

即局部静态 Schwarzschild 度规在大半径下会连续过渡到一个 FRW 背景的径向度规 (120)。而时间度规

$$g_{00} = 1 + 2\left(\Phi_N + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) \overset{\text{大半径}}{\to} 1 + \mathbf{v}^2_{\text{膨胀}} \approx 1 + z^2 \approx \mathbf{a}^{-2}$$

也在大半径下连续过渡到 FRW 背景的共动时间度规。等价的也可以解释成，在大半径下，引力势的时间膨胀逐渐减小，膨胀速度的相对论时间膨胀效应逐渐主导，渐近过渡成为宇宙学尺度因子给出时间膨胀。

另外，由于星系随宇宙背景共动膨胀 $r = \mathbf{a}r_0$，星系膨胀速度和质心距离 r 成正比（Hubble 定律），如果星系红移不是很大，那么星系的哈勃速率近似也就是地球观察者的哈勃速率 H_0

$$\mathbf{v}_{\text{膨胀}} = \frac{dr}{dt} = H_0 r \tag{140}$$

值得指出的是这个星系膨胀动能项 $\frac{1}{2}\mathbf{v}^2_{\text{膨胀}} = \frac{1}{2}H_0^2 r^2$ 和 Schwarzschild-deSitter 静态解的排斥势 $\frac{\Lambda}{6}r^2 = \frac{1}{2}\Omega_\Lambda H_0^2 r^2$ 在数值上同量级，但符号相反，提供一个“吸引力”。原因是这个考虑了星系膨胀动能对牛顿势平移的度规并不是静态近似下的 Schwarzschild-deSitter 度规，而是超越静态近似的低速运动效应修正（经典膨胀带来的后牛顿近似）。因此如果考虑宇宙常数导致的 Schwarzschild-deSitter 解，这个后牛顿近似的“吸引力”项会和排斥势 $\frac{\Lambda}{6}r^2$ 抵消掉一部分，剩余一个对牛顿势修正的纯吸引势。这种依赖特定坐标系的度规层面的的减除，在下文中，我们通过后牛顿近似修正的曲率和宇宙常数在作用量层面的协变的减除来考虑。

虽然由于 H_0 很小，在星系发光半径 $r_{\text{星系}} \sim O(10\text{kpc})$ 里面星系的膨胀速度远小于旋转速度，几乎是可以忽略的，但随着长时间的自身膨胀，不同演化历史的星系可能会看起来有不同的发光半径。一个可能的预言是由于星系半径随尺度因子 $\mathbf{a} = (1+z)^{-1}$ 共动膨胀，因此我们看到更遥远的星系对应更早期红移更大的星系，他们的发光半径应该更小，即星系特征半径随红移的变化为 $r_{\text{星系}} \sim (1+z)^{-1}$。这符合目前的一些观测，虽然目前主流的观点是认为，这个关系是来自星系间介质的气体和恒星的吸积以及与其他星系的合并的结果，而这里的解释很简单，就是来自星系随宇宙背景尺度因子的膨胀。

由于半径随尺度因子膨胀，这如果不是主要的贡献，也至少部分的贡献了漩涡星系作为对数螺线（logarithmic spiral）构型的一种成因。因为在某个较小的初始半径内，星系物质的图样如果以近乎恒定的角速度 ω 旋转，在 dt 时间内这些物质旋转了角度 $d\theta = \omega dt$，同时半径也膨胀了距离 dr，从方程 (140) 就得到对数螺线方程 $\frac{dr}{d\theta} = \frac{H_0}{\omega}r$，解就得到星系物质图样随空间膨胀被甩拽出来的一条对数螺线 $r \sim \exp\left(\frac{H_0}{\omega}\theta\right)$ 的悬臂。对数螺线的悬臂图样有一个近乎常数的螺距角（pitch angle）i：定义为星系物质的绕行速度切线和悬臂切线之间的夹角，在这里螺矩角 $\tan i = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{H_0}{\omega}$。通常大多数开放悬臂的螺矩角都在 $10° \sim 30°$ 的区间左右，由于 H_0 比较小，如果星系图样旋转的角速度 ω 也足够小的时候（图样有其自身的生成机制，比如密度波，因此图样的旋转角速度可以远低于星系物质的旋转角速度），就可以给出一个实际量级的螺矩角了。当然这里的考虑过于简化了，现实的星系图样由更多因素共同影响要复杂得多。

解释在度规中引入星系自身膨胀项 $\frac{1}{2}\mathbf{v}^2_{\text{膨胀}}$ 的原因，除了上面提到的星系自身膨胀动能的后牛顿近似以及膨胀尺度因子的局部效应，还可以从位力 (virial) 平衡的角度来看。因为显然在小尺度局部星系极限下，主要是标准的旋转动能和牛顿引力势能之间的位力平衡，而在膨胀宇宙极限下，旋转本动和牛顿引力势都变得很小，那么主要就是星系的膨胀动能（吸引力）和产生膨胀的某种等效“外场排斥势能“之间的位力平衡。在这两个极限的连续过渡过程中，我们显然需要考虑牛顿引力势、旋转动能、膨胀动能和宇宙常数主导的“外场排斥势能”4 者的

整体位力平衡，虽然这个“外场势能”并没有明显出现在 FRW 度规 (139) 中，而是主要体现在 (137) 的宇宙常数中。

注意到旋转速度 $\mathbf{v}_{旋转}$ 在星系星核之外基本上就开始处于速度平台了，可以认为并不贡献半径方向的梯度，但星系膨胀速度分量 $\mathbf{v}_{膨胀}$ 沿着半径方向，有明显的半径梯度。星系膨胀加速度 a_E 就是总动能的负梯度

$$a_E = \left|-\nabla_r\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)\right| = \left|-\nabla_r\left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{v}_{旋转}^2 + \mathbf{v}_{膨胀}^2\right)\right]\right| = \left|-\nabla_r\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_{膨胀}^2\right)\right| \overset{局部}{=} H_0^2 r$$

其中“ $\overset{局部}{=}$ ”表示在局部 Schwarzschild 坐标系中，跟下面“$\overset{\mathrm{FRW}}{=}$”在 FRW 度规中表示膨胀加速度有不同的形式。另一种办法是将加速度定义成膨胀速度对局部 Schwarzschild 时间的导数也是相同的结果

$$a_E \overset{局部}{=} \frac{d\mathbf{v}_{膨胀}}{dt} \overset{\dot{H}_0=0}{\approx} H_0\frac{dr}{dt} = H_0\mathbf{v}_{膨胀} = H_0^2 r \tag{141}$$

星系膨胀动能贡献了一个额外的径向加速度。这时作为引力源的星系重子物质的能动张量，不仅有重子物质 M_b 静止时的贡献 $|-\nabla_r\Phi_N| = \frac{GM_b}{r^2} = a_N$，在局部坐标中还有星系物质膨胀加速度 $H_0^2 r$ 的贡献。

但这个加速度在通常星系发光的半径 $r_{星系} \sim O(10\mathrm{kpc})$ 通常远小于 a_N 的量级，因此这时星系自身膨胀通常是可以忽略的，正如同上一节在星系边缘忽略自身膨胀所作的近似那样（这时起到修改引力的主要是宇宙常数对局部引力加速度的修正）。但由于这个加速度和半径成正比，在距离相比星系发光半径 ($r_{星系} \sim O(10\mathrm{kpc})$) 更大，牛顿引力非常弱了，星系自身膨胀的吸引力效应相比之下变得重要。我们可以做一个估计，当这个半径达到某个 r_c，以至于 $a_E(r)$ 在 r_c 开始达到并大于 a_N 的时候，即 $a_E(r_c) \overset{局部}{=} H_0^2 r_c = a_N$，星系膨胀的加速度变得重要了

$$r_c = \left(\frac{GM_b}{H_0^2}\right)^{1/3} \sim r\left(\frac{\rho_b}{\rho_c}\right)^{1/3} \sim r_S^{1/3} r_H^{2/3} \tag{142}$$

其中 r 比如是星系的某个可见半径，$\rho_b = \frac{M_b}{\frac{4}{3}\pi r^3}$ 是这个半径球体积内的平均重子物质密度，$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ 是临界密度，$r_S = 2GM_b$ 是 Schwarzschild 半径，$r_H \sim H_0^{-1}$ 是哈勃半径。当 $r > r_c$ 时，$a_E > a_N$，牛顿引力加速度不再主导星系外卫星的运动，而星系共动膨胀给出的等效“吸引力”和宇宙常数给出的“排斥力”之间的竞争开始主导引力加速度和卫星的行为。

在 $r < r_c$ 时星系自身加速膨胀可忽略，这时总加速度可以近似为上一节受到宇宙常数影响的情况 $a(a_N, a_{背景}, a_E) \overset{r<r_c}{\approx} \sqrt{a_N^2 + a_{背景}^2}$。当半径达到比星系发光半径更大的半径尺度 r_c 时，静态“局部”星系质心系看到的总加速度

$$a = \left|-\nabla_r\left(\Phi_N + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + ...\right)\right| \overset{局部}{=} \left|\frac{GM_b}{r^2} + H_0^2 r\right| = |a_N + a_E| \tag{143}$$

首先值得指出的是，膨胀动能 (的负梯度) 给出的 a_E 也是“吸引力”，和 a_N 是同方向的，因此当系统达成位力平衡的时候，将给出比预期更大的旋转速度。另外，我们注意到，宇宙常数产生的额外加速度贡献在局部静态引力中和在动态 FRW 背景中的含义和表现有所不同，在局部静态引力中是以空间梯度 (143) 的方式贡献的，而在其嵌入的动态 FRW 背景中是以均匀背景加速度 $a_{背景}$ 的方式贡献的。a_E 和 $a_{背景}$ (121) 表面上的不同只是使用了不同坐标系导致的问题，前者是在局部静态 Schwarzschild 坐标系后者是在 FRW 坐标系观察者看到的空间膨胀加速度。在 FRW 坐标系中，不再是 (141) 给出的 $\mathbf{v}_{膨胀}dt \overset{局部}{=} dr$，而是因为在 FRW 坐标中有尺度因子 $\mathbf{a}$ 的贡献，我们考虑 $\mathbf{v}_{膨胀}t \overset{\mathrm{FRW}}{=} \mathbf{a}r$，两边微分得到 $\mathbf{v}_{膨胀}dt \overset{\mathrm{FRW}}{=} \mathbf{a}dr + r\dot{\mathbf{a}}dt$，于是 $\frac{1}{\mathbf{a}}\mathbf{v}_{膨胀}dt \overset{\mathrm{FRW}}{=} dr + r\frac{\dot{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}}dt$，由于 $r\frac{\dot{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}} = H_0 r = \mathbf{v}_{膨胀}$，我们就得到 $dr \overset{\mathrm{FRW}}{=} \left(\frac{1}{\mathbf{a}} - 1\right)\mathbf{v}_{膨胀}dt \overset{\mathrm{FRW}}{=} z\mathbf{v}_{膨胀}dt$，因此

$$a_E = \left|-\nabla_r\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_{膨胀}^2\right)\right| = \mathbf{v}_{膨胀}\frac{d}{dr}\mathbf{v}_{膨胀} \overset{\mathrm{FRW}}{=} \frac{1}{z}\frac{d\mathbf{v}_{膨胀}}{dt} \approx \frac{1}{z}\frac{dz}{dt} \approx -q_0 H_0 \approx a_{背景} \approx \sqrt{\Lambda}$$

这里注明“$\overset{\mathrm{FRW}}{=}$”是膨胀加速度在 FRW 坐标下的形式。于是，*在“局部”Schwarzschild 质心坐标系观察者看来，一个随半径线性增加的膨胀加速度 a_E，在均匀各向同性的 FRW 坐标系观察者看来，就是一个各向同性的常数背*

景加速度 $a_{背景}$。从坐标系选择无关（协变）的曲率的角度来看，在星系自身本动很小（$a_N \to 0$）的大半径宇宙学尺度，星系共动膨胀的加速度 a_E 对应的就是背景加速度对应的背景曲率 $R(0) = 2a^2_{背景} \approx 2\Lambda$ 下限。认识到这点，我们就能看到这避免了很多由于 MOND 的非协变性带来的理论本身应用上的含糊性和固有困难：诸如膨胀加速度在大于某个半径（或者对于地球观察者来说在大约 $z \gtrsim 0.2$ 红移之外）之后，线性增加的加速度在这个大半径下开始超过 $a_{背景} \sim a_0$，按 MOND 理论，大加速度下应该回到牛顿引力，而不应该出现 MOND 修改引力行为，这是与观测不符合的。因为观测告诉我们，更大红移的星系的修改引力行为和低红移情形并没有很大的区别。将协变的曲率和非协变的加速度对应起来的关系 (130) 本身就是相差一个坐标变换带来的全微分，于是我们将 (143) 中的局部膨胀加速度 a_E 替换成 FRW 坐标系的常数背景加速度 $a_{背景}$，

$$\frac{1}{2}R \overset{差全微分}{\approx} \mathcal{R} \approx a^2 \overset{\text{FRW}}{=} (a_N + a_{背景})^2$$

现在在星系局部静态引力中得到的总加速度 a 对应的曲率和联络给出了试探粒子总的测地线和总运动，混合了切向旋转运动和相对星系质心径向共动膨胀的运动。现在关心的只是多普勒展宽测量到的其中旋转部分的速度，对应的要扣除掉各向同性的背景膨胀加速度 $a_{背景}$ 才能得到有效的旋转加速度 $a_D = \frac{\mathbf{v}^2_{旋转}}{r}$。因此地球观察者看到的有效旋转加速度 a_D 和星系质心系的 a_N 一般来说也不再相等了。a_D 和 a_N 的偏离总结起来原因就是两个，首先相对于局部静态的星系物质除了有旋转加速度 a_N 外，还有相对星系质心系的星系自身加速膨胀；其次总加速度 $a \overset{\text{FRW}}{=} |a_N + a_{背景}|$ 还需要扣除掉动态 FRW 背景加速度 $a_{背景}$ 才是有效旋转加速度 a_D，这个有效旋转加速度才是给出多普勒展宽测量到的旋转加速度。由于 (137)，相当于扣除掉 FRW 度规中地球观察者系看到的均匀各向同性的背景加速度 $a_{背景}$。综上，星系膨胀动能带来的向心的"吸引力"$|a_N + a_{背景}|$，和 Schwarzschild-deSitter 排斥势项 $\frac{1}{6}\Lambda r^2$ 或者宇宙常数产生的背景加速膨胀离心"排斥力"$a_{背景}$ 相互竞争，剩余一个纯向心的旋转加速度

$$a_D \overset{弱场}{\approx} \sqrt{\frac{1}{2}\left(R(\tau) - 2\Lambda\right)} \overset{\text{FRW}}{=} \sqrt{\left(a_N + a_{背景}\right)^2 - a^2_{背景}} \tag{144}$$

其中 $a_{背景} = -q_0 H_0 \approx \sqrt{\Lambda}$。

这种吸引力 $+a_{背景}$ 和排斥力 $-a^2_{背景}$ 在 FRW 坐标中的相互竞争，也可以从 Schwarzschild 坐标系的角度来看。由于前面考虑的是静态 Schwarzschild 度规 (139) 中的膨胀动能带来的吸引力修正，如果在静态 Schwarzschild-deSitter 度规 $g_{rr} = \left(1 - \frac{2GM_b}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} = \left(1 - \frac{2GM_b}{r} - \Omega_\Lambda H_0^2 r^2\right)^{-1}$ 中考虑动能项修正 (138)，$\frac{1}{2}\left(\mathbf{v}^2_{膨胀} + \mathbf{v}^2_{旋转}\right) = \frac{1}{2}H_0^2 r^2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2_{旋转}$，变成

$$g_{rr} = \left[1 - \frac{2GM_b}{r} + (1 - \Omega_\Lambda)H_0^2 r^2 + \mathbf{v}^2_{旋转}\right]^{-1}$$

除了旋转速度平方的常数项，第三项 $(1 - \Omega_\Lambda)H_0^2 r^2$ 大于 0，说明"吸引"和"排斥"相互竞争之后还剩余一个额外"吸引力"。单位 1 扣除掉 Ω_Λ 剩下的部分都贡献了类似通常重子产生的引力，但其实重子的比例并没有这么大。原因就在于其中哈勃速率 H_0 膨胀的并不是由物质（遵循 Einstein 方程）给出的，而是在大尺度主要是遵循时空的 Ricci 流和 GSRS 极限构型产生的。"不可见物质"$1 - \Omega_\Lambda$ 可以看作是大尺度的度规遵循的 Ricci 流方程和通常 Einstein 方程之间的不匹配造成的。我们通过这个度规求出有效加速度为

$$\begin{aligned} a &\overset{局部}{=} \left|-\nabla_r\left(-\frac{GM_b}{r} + \frac{1}{2}(1 - \Omega_\Lambda)H_0^2 r^2\right)\right| = \left|\frac{GM_b}{r^2} + (1 - \Omega_\Lambda)H_0^2 r\right| \\ &= \frac{G}{r^2}\left|M_b + \frac{8\pi(1 - \Omega_\Lambda)3H_0^2}{3 \times 8\pi G}r^3\right| \sim \frac{G}{r^2}\left|M_b + \langle\rho_{DM}\rangle\frac{4}{3}\pi r^3\right| = \frac{GM_{b+DM}}{r^2} \end{aligned} \tag{145}$$

其中 $\langle\rho_{DM}\rangle \sim 2(1 - \Omega_\Lambda)\frac{3H_0^2}{8\pi G} = 2(1 - \Omega_\Lambda)\rho_c$，$M_{b+DM} = M_b + \langle\rho_{DM}\rangle\frac{4}{3}\pi r^3$。要在大半径下旋转速度定性的趋于一个平台，需要 $M_{b+DM} \propto r$，即 $\langle\rho_{DM}\rangle \propto \frac{1}{r^2}$ 随半径分布，这类似暗晕的所谓 Navarro-Frenk-White（NFW）分

布，那么正是这部分额外的“吸引势”扮演了的冷暗物质的角色。换句话说，如果从一个带宇宙常数并动态膨胀的 FRW 度规连续过渡回到一个局部静态 Schwarzschild 度规，那么这个 Schwarzschild 度规会受到背景膨胀 FRW 度规的影响，即对其中的牛顿引力源质量会修正一个额外的引力源质量，其密度 $\langle\rho_{DM}\rangle\sim 2(1-\Omega_\Lambda)\rho_c$ 大约就是宇宙学所需要的“暗物质”密度。(145) 是从 Schwarzschild 坐标系的“暗物质”的角度来看待膨胀动能和宇宙常数的排斥势相互竞争的效应。在这个“暗物质”的图像中，如果要得到旋转曲线平台，我们需要额外假设“暗物质”在星系周围的半径分布 $\rho_{DM}\propto\frac{1}{r^2}$，但如果采用加速度内插的方式 (144) 来考虑，并不需要对“暗物质”的半径分布有额外的假设，这种分布已经隐含在加速度内插关系中的，这就是加速度内插关系比“暗物质”假设更漂亮的地方。

加速度内插关系 (144) 显示在图 2 的黑色虚线上，与拟合的数据点 (红线) 符合得很好。在 $a_N\ll a_{背景}$ 的星系外围，(144) 吸引和排斥相互竞争之后，剩下的也是一个纯吸引的项，可以近似成

$$a_D\approx\sqrt{2a_N a_{背景}},\qquad (a_N\to 0)$$

这个关系定性上得到了 deep-MOND 极限下的动力学关系。

类似之前考虑最低加速度背景 $a_{min}\sim\Upsilon^{3/2}a_{背景}\sim\Upsilon^{3/2}\sqrt{\Lambda}$ 的重整化，这里也需要考虑 Ricc 流效应给出对 $a_{背景}\sim\sqrt{\Lambda}$ 的一个额外的重整化因子 $\Upsilon^{3/2}\approx(0.13\sim 0.18)^{3/2}$（物质和引力耦合重整化的贡献 Υ，以及 $\sqrt{R(\tau)}$ 重整化 $\Upsilon^{1/2}$ 的贡献），于是 (144) 变成

$$a_D\overset{\text{FRW}}{\approx}\sqrt{\left(a_N+\Upsilon^{\frac{3}{2}}a_{背景}\right)^2-\Upsilon^3 a_{背景}^2}=\sqrt{\left(a_N+a_{min}\right)^2-a_{min}^2}\approx\sqrt{2\Upsilon^{\frac{3}{2}}a_N a_{背景}}=\sqrt{2a_N a_{min}}$$

考虑到 $a_D=\frac{v_f^2}{r}$ 和 $a_N=\frac{GM_b}{r^2}$，就得到 Tully-Fisher 关系

$$v_f^4\approx 2\Upsilon^{\frac{3}{2}}GM_b a_{背景}=2GM_b a_{min}\approx GM_b a_0$$

以及其中的加速度常数

$$a_0\approx 2\Upsilon^{3/2}a_{背景}\approx 2\Upsilon^{3/2}\sqrt{\Lambda}\approx\frac{\sqrt{\Lambda}}{(6\sim 10)}\approx 1.2\times 10^{-10}m/s^2$$

和在漩涡星系得到的拟合 (119) 比较接近。

因此在这里，我们给出 MOND 以及 Tully-Fisher 关系中的加速度常数 a_0 的一种可能的物理解释，即 a_0 其实可以看作是起源于宇宙背景加速度 $a_{背景}$，（不同于 MOND，在 MOND 理论中通常是将 a_0 和宇宙常数 Λ 或者哈勃常数 H_0 联系起来）。Tully-Fisher 关系拟合到的 a_0 和 $a_{背景}$ 之间若干倍的差别可能有比较复杂的多方面来源。比如，漩涡星系的重子质量分布并不是球对称的而是盘状的，这可能造成一定的修正贡献，可能有质光比测量不确定的贡献，也可能有 Hubble 参数测量的不确定的贡献，也有重整化的贡献，也可能的确有一些不可见物质的贡献等等，这里我们把主要的贡献归结到 Ricci 流重整化 $\Upsilon^{3/2}$ 因子，即 $a_0\approx 2\Upsilon^{3/2}\sqrt{\Lambda}\approx 2\Upsilon^{3/2}a_{背景}$ 作为 $a_{背景}$ 的重整化版本，这在一定测量误差范围内可以对这个数倍的差别给出一定的解释，对观测数据做一个大致不错的拟合。但值得注意的是，其实观测拟合的 a_0 还只是在漩涡星系有比较好的拟合，取值大约就是 $a_0\approx 1.2\times 10^{-10}m/s^2$，而在矮星系 (dwarf)、气体盘星系 (gas disk)、更大尺度的星系团簇 (group 和 cluster) 等方面拟合得到的 a_0 还有比较大的弥散。换句话说，如果这个对 a_0 的解释是正确的，那么可能 $a_{背景}$ 是普适的常数，但 a_0 和 $a_{背景}$ 之间的比例系数可能却不是普适的。

我们看到，除了通过半经典的讨论得到类似 MOND 的加速度内插 (144)，Ricci 流重整化因子 Υ 也非常重要，不仅修正得到了背景加速度下限 $a_{min}\approx\Upsilon^{3/2}a_{背景}\approx\Upsilon^{3/2}\sqrt{\Lambda}$，也得到了 Tully-Fisher 关系的加速度常数 $a_0\approx 2\Upsilon^{3/2}a_{背景}\approx 2\Upsilon^{3/2}\sqrt{\Lambda}$。这给出了一种加速度常数 a_0 的可能解释，即 a_0 正比于背景加速度下限。同时重整化因子 Υ 也产生了修改引力之外的有效缺失冷暗物质 $\Delta\rho\approx\rho_b\left(\Upsilon^{-1}-1\right)$，但 Υ 其实并不严格是一个常数，

考虑其还能写成形式 $\Upsilon^{-1} \approx 1 + \frac{R(\tau_0)}{R(\tau)}$，修正了重子物质密度，等价的修正了 $a_N \to \Upsilon^{-1} a_N \approx \left[1 + \frac{R(\tau_0)}{R(\tau)}\right] a_N \approx \left[1 + \left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right] a_N$ 能如同 MoNDian dark matter 那样改善对更大尺度的星系团和宇宙学观测的拟合。

我们也看到，如果没有 (144) 的宇宙常数或背景加速度的扣除，$a_D = v_f^2/r \overset{a_N \to 0}{\sim} a_{背景}$，那么旋转速度就会像 $v_f \sim \sqrt{a_{背景} r}$ 那样随半径增加，而不能逐渐收敛到观测到的 Tully-Fisher 速度平台。

如果忽略星系自身膨胀 a_E，速度 $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^2_{旋转} + \mathbf{v}^2_{膨胀}$ 忽略膨胀速度的贡献，于是 (143) 中的动能和势能 $\Phi_N - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2_{旋转}$ 达成位力平衡，旋转加速度 $a_D = \frac{\mathbf{v}^2_{旋转}}{r}$ 在 $O(a_0)$ 阶的程度上近似退回到 $a_N = |-\nabla_r \Phi_N|$，这时 (144) 的总加速度合成关系 $a = \sqrt{a_D^2 + a_{背景}^2}$ 可以看作就退回到上一节 (VI E 2) 中得到的 $a \approx \sqrt{a_N^2 + a_{背景}^2}$，也就是 $R - 2\Lambda = R_{eff} \approx R_N = 2a_N^2$ 的情况，于是本节在忽略星系自身膨胀加速度 a_E 时就逐渐过渡退回到上一节 (VI E 2) 只有 $a^2_{背景}$ 贡献的结果。因此上一节的结果可以看作是忽略自身膨胀的特殊情况，本节的结果更一般的包含了上一节的结果。

总结一下，要得到 Milgrom 提出的在 deep-MOND 区间 $a_D \ll a_0$ 的行为，星系自身的加速膨胀的贡献需要在一个比较大的半径尺度 r_c 下被考虑了。*一方面宇宙常数带来的星系自身加速膨胀以膨胀动能的方式贡献到局部静态牛顿引力中，另一方面又以背景加速度的方式贡献到动态 FRW 中，这个背景加速度需要被减除，成为地球观察者（空间任何一点的观察者）看到的有效旋转加速度。*

这种合成 (144) 也可以通过局部谱线展宽的方式来解释（见 VII E）。利用加速度和额外增宽的正比关系 (68)，因此重子物质产生的星系外谱线的旋转加速度 a_D 贡献一个谱线展宽，$\tilde{\sigma}_{加速度} = 2a_D^2$，对应的是旋转速度 $a_D = \frac{\mathbf{v}^2_{旋转}}{r}$。另一方面，由于带有宇宙常数的背景时空的频谱展宽也等效于在所有空间点上任何时刻都有一个有效的本地 (proper) 背景加速度 $a_{背景}$。更严格的说，Ricci 流产生宇宙背景加速膨胀贡献一个额外的背景加速度 $a_{背景} = \frac{1}{z}\frac{dz}{dt} \approx -q_0 H_0$，带来相应的普适频谱展宽 $\tilde{\sigma}_{背景} \approx 2q_0^2 H_0^2 = 2a^2_{背景} \approx 2\Lambda$。展宽修正了加速度对谱线的展宽得到一个有效的加速度

$$\delta\sigma_\omega = \tilde{\sigma}_{加速度} + \tilde{\sigma}_{背景} = 2a_D^2 + 2a^2_{背景} = 2a^2$$

对应于一个在 FRW 宇宙加速背景中的星系的总加速度 a。但 a 作为总加速度，包括了试探粒子与空间一起共动膨胀的加速度部分，也包括试探粒子相对于膨胀坐标加速的部分，而只对惯性坐标系成立的牛顿定律所给出的外力加速度其实只是超出背景坐标系加速的 $a_{背景}$ 的部分，因此 $|a - a_{背景}|$ 是径向的牛顿引力加速度 a_N。从这个角度我们看 (144) 里面，扣除 FRW 背景加速度 $a^2_{背景}$ 是平方相减，因此并没有方向性，解释成是一种展宽的减除，因为背景加速度本质上来自量子二阶矩涨落，是时空的量子效应，只影响平方量的值。而 $|a_N + a_{背景}|$ 中加速度相加是有方向性的，都是沿着径向，因此这里解释成在局部静态质心系中牛顿加速度受到同为径向的星系膨胀加速度的影响，是一个经典效应（膨胀带来的经典后牛顿近似）。

从这个框架来看，MOND 唯像给出的偏离牛顿引力的转变趋势只需要在理论中引入宇宙常数这个新的特征尺度就可以在低加速度区间 $a \gtrsim a_{背景}$ 协变的实现，但只引进宇宙常数还不能完全实现 deep-MOND 唯像给出的极低加速度区间（$a_D \ll a_{背景}$）的偏离。要至少近似的得到 deep-MOND 行为，还需要在特定坐标系中额外的考虑星系自身的加速膨胀。所以在我们看来要给出完整的加速度偏离行为，至少需要三个必要的条件：

（a）协变作用量层面，引入和临界密度联系的新特征尺度或能标，引入时空 Ricci 流导致的宇宙常数；

（b）非协变层面，考虑 FRW 坐标系下膨胀的尺度因子对局部星系物质产生的修正效应。协变性的破坏导致了 MOND 行为，这避免了 Soussa-Woodard 的 no-go 定理，但同时也给出某种可能的预测，即 MOND 行为只能在特定坐标系中才能看到，存在某些特殊坐标系（比如非共动膨胀坐标系）MOND 修正会被坐标变换规范掉。从这个意义上，MOND 行为其实只是特定非惯性坐标系（一个将惯性系做共形膨胀变换的坐标系）中的牛顿引力定律；

（c）考虑额外的时空 Ricci 流的次级修正，例如重正化因子 Υ 等的修正效应，由于 Ricci 流会带来除经典共形变换（b）之外还有其他的共形变换效应，及其一些尚未考虑的高阶效应。

从这个意义上说，(b) 要求 deep-MOND 的实现需要破坏坐标协变性。我们观测到 (a) 在星系外围 $r_{星系} \sim$ 10kpc 加速度比较低的 $a \gtrsim a_{背景}$ 区间就开始重要了，而 (b) 要在半径比较大 $r > r_c > r_{星系}$ 的区间才变得重要。

表面上看来要近似得到 MOND 的加速度反常行为需要满足前两个条件似乎都是经典效应，但这些经典效应其实都起源于时空的量子效应：(a) 宇宙常数来源于一般坐标变换导致的量子反常或者时空 Ricci 流的抵消项，而宇宙常数等效的产生了星系自身的加速膨胀 (b) 反过来也带来了额外对引力的修正。而条件 (c) 就是纯量子起源的修正。

在笔者看来，通过这三个条件和修正，我们能以最为保守的方式去给出星系外围的加速度反常的理解：尽可能的保留（引入了宇宙常数的）Einstein 引力的形式，起源于量子效应的宇宙常数给出的经典效应和次级效应已经足够给出主要的修正贡献，尽可能少的引进很难通过非引力手段探测的"冷暗物质"。*我们把星系外围的加速度反常简单的看作是（小尺度）局部星系引力在其外围和（大尺度）外部引力背景的连续过渡出现的现象*。一个不太严格的类比是，原子最外层价电子能级，受到特定外电场影响产生能级移动的 (斯塔克类型) 效应，就类似于，星系外围卫星运动，受到宇宙常数带来的空间加速膨胀（类似外电场）产生的反常。不同的是，价电子能级（包含电子动能、电势能和外场能量）很难扣除外场能量，只能测量有效的总能级移动；而星系外围卫星，比如漩涡星系，有较明显的整体旋转的盘状结构及其外围延展的中性氢气体，相对容易区分单纯的旋转运动效应而背景"外场"的效应，能单独测量出转动动能的移动，而对于一些非漩涡星系，比如一些球状矮星系，一方面它们没有明显整体转动的盘状结构 (或外围中性氢气体)，另一方面他们除了旋转支撑外压强支撑（随机运动支撑）也扮演了重要角色，因此单独测量出旋转速度就稍微困难一些，也只能测量到总的效应，则有可能看到加速度下限。

重子 Tully-Fisher 关系 Tully-Fisher 关系是一个纯观测上看到的关系，漩涡星系渐近的旋转速度的四次方和该星系的光度或重子物质质量成正比。这个关系后来通过更精确的加入很难被观测到的重子气体的贡献（比如很暗的 21cm 谱线），更精确的满足所谓重子的 Tully-Fisher 关系。这个关系似乎对绝大多数不同类型的漩涡星系都是成立的。

上一节我们已经给出了一种在极低加速度区间 ($a_N < a_E \sim O(a_0)$) 的 Tully-Fisher 关系的简单推导 (144)。不仅在极低加速度区间，在低加速度 ($a_N \sim O(a_0)$) 区间这个关系也会近似出现，只要在星系可见半径 $r_{星系}$ 达到位力平衡，$a_N(r_{星系}) = \frac{GM_b}{r^2_{星系}} \sim O(a_0) \sim a \sim \frac{v_f^2}{r_{星系}}$，其中用 a_0 去消掉 $r_{星系}$ 也就给出 Tully-Fisher 关系 $v_f^2 \sim \sqrt{GM_b a_0}$。因此 Tully-Fisher 关系和速度平台在相当大的半径范围内，从低加速度到极低加速度区间都会近似的出现。

径向加速度偏离 令人惊讶的是，对很多观测到的星系来说，重子 Tully-Fisher 关系和星系的大小、表面亮度、物质成份等都没有关系，只是一个简单的观测到的标度关系。它主要反映了星系在渐近低曲率或低加速度半径下 deep-MOND 极限的引力。要精确的检验在不同星系、不同半径下引力的拉氏量的内插函数，需要考虑 McGaugh、Lelli 和 Schombert 等人考虑的星系的径向加速度关系。这个关系包含并推广了 Tully-Fisher 关系。图 1 中的蓝色数据点给出了 2693 个数据点分布，涵盖了不同质量、不同大小、不同气体成分、不同内部物质分布的 153 个星系。这些蓝色点的数据点主要分布在旋转加速度在 $(10^{-11} \sim 10^{-9})m/s^2$ 范围内。我们惊人的看到这些数据点和星系不同的暗物质假设无关，只与牛顿定律给出的重子加速度密切相关，并且数据弥散惊人的小。如果不考虑最低的加速度下限平台，这些蓝色数据点可以通过

$$a_{fit} = \frac{a_N}{1 - e^{-\sqrt{a_N/a_0}}} \tag{146}$$

来拟合，其中 $a_0 \approx 1.2 \times 10^{-10} m/s^2$ 还是加速度常数。这个拟合曲线在图 2 中由细红线来给出，并且延拓到了低于 $10^{-11} m/s^2$ 的 deep-MOND 范围。这个蓝色数据点以及细红线拟合的行为可以从我们理论的黑色虚线 $a_D = \sqrt{(a_N + a_0)^2 - a_0^2}$ 在误差范围内近似的给出。另外圆圈和菱形（区分 MW 和 M31）数据点由超微弱的矮球状星系 ultrafaint dwarf Spheroidals (dSphs) 给出了一个可能的加速度下限平台 $(9.2 \pm 0.2) \times 10^{-12} m/s^2$。

现在看来，不同于所谓"暗能量"问题基本可以通过时空或谱线的二阶矩展宽对距离-红移关系平方阶的修改

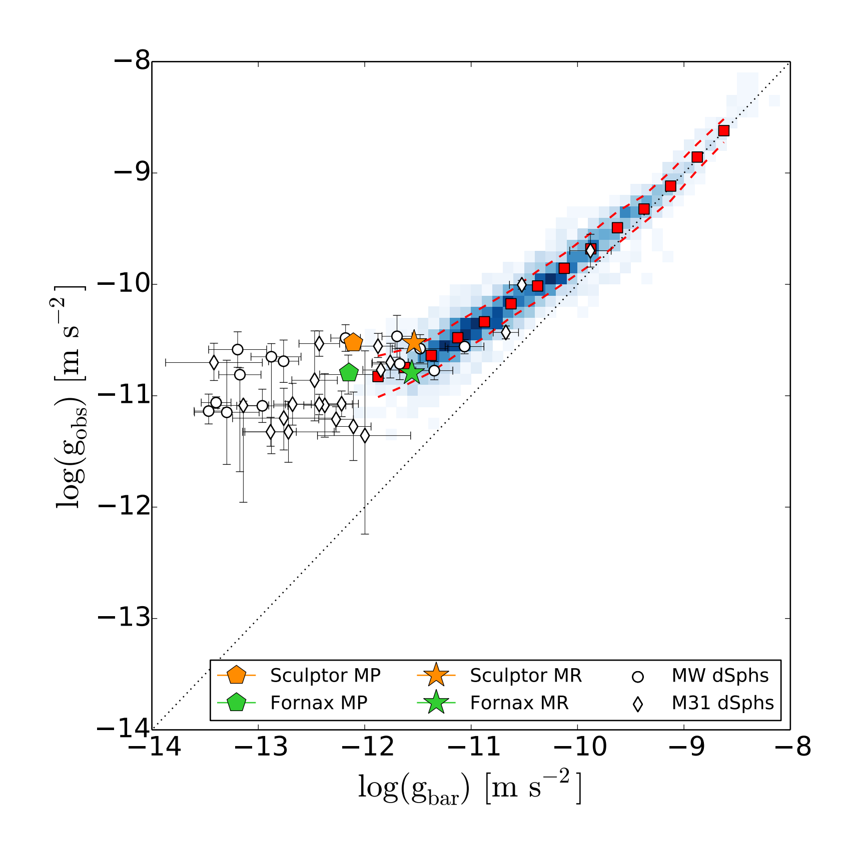


图 1: 观测到的径向加速度。蓝色方块点给出了 153 个星系的 2693 个数据点，红色点代表平均值。圆圈 (Milky Way dSphs) 和菱形点 (M31 dSphs) 给出矮球状星系 dwarf Spheroidals (dSphs) 的数据点，给出一个可能的加速度下限平台 $a^{re}_{背景} \approx a_{min} \approx (9.2 \pm 0.2) \times 10^{-12} m/s^2$，特别是那些 ultrafaint dSphs。

来给出，而星系外围的加速度反常或者所谓“重子物质缺失”的问题更可能是一个有诸多复杂因素综合贡献的问题，“暗物质”问题比“暗能量”问题要“脏”很多，因此目前这个问题仍然还没有确定性的结论。正是由于“重子物质缺失”问题自身的复杂性，我们更是应该首先去抓住那些比较确定的不可避免的因素的贡献，但不能奢望这些因素能完全一举解决所有问题。比如目前看来有这样一些因素的贡献是不可避免的：包括 (i) 星系外围的曲率和有效加速度在比较低的 $O(a_0)$ 时候受到宇宙常数修正的贡献 (大约发生在星系可见半径外围已经开始显著起来)；(ii) 在半径大于 $r_c \sim r_S^{1/2} r_H^{2/3}$，星系自身加速膨胀对星系加速度偏离的进一步贡献；(iii) 时空的 Ricci 流对曲率或等效重子物质密度的重整化修正；(iv) 当然也不排除一些尚待发现的“冷暗物质”的贡献（这是目前主流的方向），等等。其实我们目前对除了压强支撑、旋转支撑之外的其他可能的星系支撑方式了解还不够，对星系所发出的谱线除了引力红移、多普勒红移、热展宽、多普勒展宽等效应之外，还受到其他效应的可能影响也了解不够，当然对于宇宙中其他物质成分的观测和了解也是不够的，甚至对星系是否的确达成了位力平衡都了解不够，等等，在所有这些问题都研究得非常清楚之后，我们才能对“重子物质缺失”问题有更为确定的了解。在我们看来，Ricci 流和宇宙常数对局部引力的效应是不可避免的，问题不在于这些效应是否存在，问题只是在于这些效应是否足够给出大部分观测到的加速度反常？以及能给出哪些独特的新预测？我们在本章表明了时空的 Ricci 流和宇宙常数会带来 (i)(ii)(iii) 效应是必然的，而且也完全有可能扮演主导的角色。而且我们现在知道虽然 MOND 能一定程度拟合星系尺度数据，但 MOND 由于非协变的属性在宇宙学尺度的应用是含混不清的，目前拟合宇宙学尺度（比如大尺度结构形成和微波背景辐射的重子声学振荡）依然是 ΛCDM 模型工作得更好。我们目前这个基于宇宙常数和 Ricci 流修正的 Einstein 引力的保守框架，Ricci 流造成的曲率或物质密度的变化扮演了缺失的“冷暗物质”的角色，使得这个图像在大尺度也类似一个宇宙常数和“冷暗物质”混合的 ΛCDM。

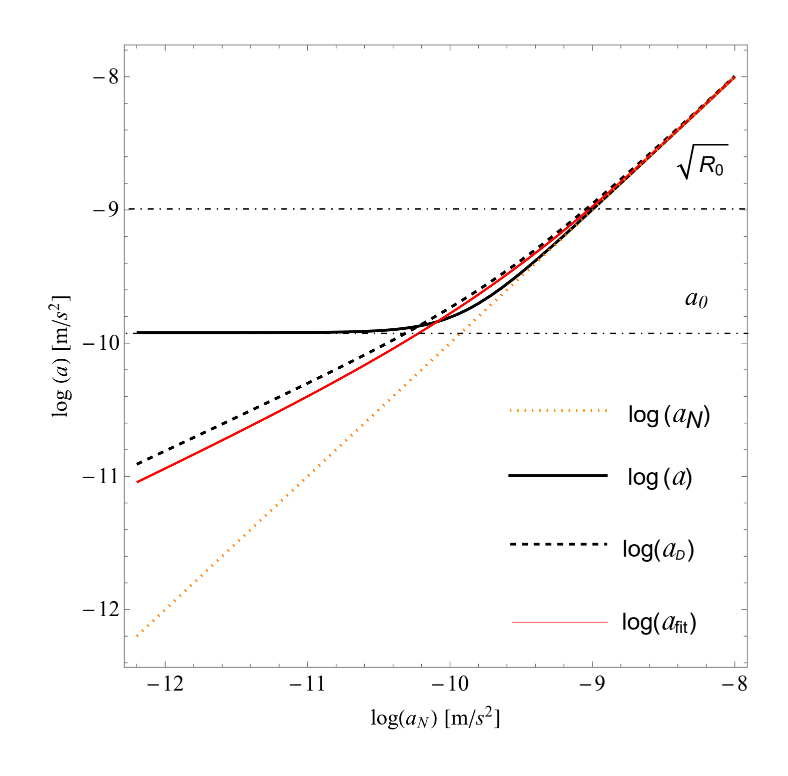


图 2: 理论给出的径向加速度和牛顿引力根据重子物质预言的加速度的偏离，可与图 1 的测量结果比较。水平轴或者橘色点线给出的是牛顿引力根据重子物质预言的星系旋转加速度。红线是拟合图 1 的蓝色数据点并延拓到很低加速度的拟合曲线 $a_{fit} = \frac{a_N}{1-e^{-\sqrt{a_N/a_0}}}$。当 $a \gtrsim O(a_0)$，可近似忽略 a 中背景膨胀加速度 a_0 的部分，只考虑宇宙常数对曲率或加速度的修正，得到黑色实线 $a \approx \sqrt{a_N^2 + a_0^2}$，在该区间得到了大致偏离 a_N 的渐近趋势。黑色实线还能定性解释和背景加速度联系的加速度下限平台，其含义是，就算星系旋转加速度降到零，星系自身也还存在随背景的加速膨胀。对于一些没有明显整体旋转盘状结构 (或外围中性氢) 和不是旋转支撑主导的非漩涡星系，比如一些球状矮星系，旋转加速度不容易和自身膨胀加速度区分开来，这时有可能会看到一个总加速度下限。如果星系的红移比较大，自身本动比较小，那么 a 将直接出现一个和背景加速度联系的渐近加速度下限平台。考虑重整化修正因子 $\Upsilon^{3/2}$，其中可以看作 Υ 的部分来自于对物质和引力势耦合的重整化，$\Upsilon^{1/2}$ 的部分来自于对 $\sqrt{\Lambda} \sim \sqrt{R_{背景}}$ 的重整化，在这些修正下，这个加速度下限可以得到和拟合比较接近的数值 $a^{re}_{背景} \approx a_0 \approx \Upsilon^{3/2}\sqrt{\Lambda} \approx O(10^{-11} m/s^2)$。当总加速度 $a \sim a_0$ 的时候，星系自身膨胀不能忽略，黑色实线就不再符合了，考虑星系自身膨胀的效应之后得到黑色虚线 $a_D \approx \sqrt{\left(a_N + \Upsilon^{\frac{3}{2}} a_{背景}\right)^2 - \Upsilon^3 a^2_{背景}} \approx \sqrt{(a_N + a_0)^2 - a_0^2}$，在误差范围内和拟合观测点的红曲线符合得很好。

F. 引力的局部共形稳定性和 F 泛函

我们前面就看到，如果简单的将量子理论放进广义相对论的框架中，是会导致诸多不稳定性的出现的。比如前面提到的宇宙常数问题，本质上就是一个经典时空无法在量子涨落中稳定的问题。在这个量子时空标架场的框架下，宇宙常数问题得到了较好较自然的解决。另一个可能存在的不稳定性问题是所谓的引力的共形不稳定性，我们这一节来看一下，这种不稳定性在量子时空标架场和时空 Ricci 流的框架下是否还存在 **(author?)** [6]。

简单的将量子理论和广义相对论放在一起导致的共形不稳定性可以这样来看，我们对度规做一个局部共形变换

$$g_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\hat{g}_{\mu\nu}(x)$$

其中 Ω 称为共形因子。于是标准 Wick 转动下的欧氏的 Einstein-Hilbert 作用量就变成了

$$S_E = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{|g|}R = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{|\hat{g}|}\left[\Omega^2\hat{R} + 6\left(\nabla\Omega\right)^2\right]$$

注意到这个作用量中共形因子动能项 $(\nabla\Omega)^2$ 前面的符号是一个“错误”的符号：正号。因为你可以对度规做一个任意的共形变换，但这有可能导致这个欧氏作用量会变得任意的负，以至于这欧氏 Einstein-Hilbert 作用量根本没有下限。如果是这样的话，那么简单的将这个理论做泛函积分量子化后得到的配分函数

$$Z=\int \mathscr{D}g_{\mu\nu}e^{-S_E}=\int \mathscr{D}\hat{g}_{\mu\nu}\mathscr{D}\Omega e^{-S_E} \tag{147}$$

由于欧氏作用量 S_E 可以无下限的任意的负，使得这个简单的量子配分函数就不可能收敛，从而是无法完善定义的，从而系统也是量子层面不稳定的。这个不稳定性就称为共形不稳定性或者引力的“无下界”（bottomless）问题。这个配分函数的发散和通常量子化经典引力导致的不可重整的紫外发散问题本质上并没有内在联系，是经典引力和量子理论内在矛盾产生的诸多问题中一个相对独立的问题。应该说，这个共形不稳定性问题是经典引力和量子理论二者之间自洽性的困难，相比可重整性的困难有更基础的地位。

虽然历史上人们有不少解决这个共形不稳定性困难的尝试，比如有些人认为这个困难只是人们不能简单的将平坦时空的 Wick 转动照搬到弯曲时空，因为有些人建议需要将对共形因子的泛函积分延拓到复平面去避免这种无下界的作用量。但是这种泛函积分延拓可能导致一些复杂的尚不清楚的非微扰的贡献。一些人认为在泛函积分共形因子的时候，应该引入一些 Jacobian 来约束共形自由度在动力学和物理的（横向无迹）自由度上，这样的话就导致了对共形因子非平凡的 Wick 转动。在这种处理中，共形因子的确会从一个“错误”的符号翻转成“正确”的，但这种作法隐含的还依赖于度规构型空间的一个尚不能确定的常数的特定取值，所以这种做法有一定的任意性。另外这种做法似乎只在作用量的线性阶成立，在非线性阶，欧氏作用量就变得异常复杂，是否会自然的翻转成“正确”的符号仍不是显然和清楚的。

当然这个将量子理论简单的应用到欧氏作用量时导致的无下界问题也可能完全不是一个真的问题，因为我们知道其实在一些能真正严格处理的量子系统中，如果只是采用半经典近似，也常常出现类似的无下界的假问题。比如氢原子作为一个吸引的库伦势里的电子的严格可解的量子系统，如果你只是简单半经典的看，似乎也是存在类似无下界的不稳定性。因为电子的吸引的库伦势能是无下界的，那么半经典的图像中，电子就会掉进这个无下界、无限深的库伦势井中，导致系统的不稳定性，但其实这种不稳定性在严格的量子的处理中，并没有发生。我们现在知道严格量子处理中，电子的本征能量是有下界的，而掉入无限深库伦吸引势里面去的概率振幅几乎为 0。而且引力中可能的确需要某种不稳定性来产生，比如极早期暴涨等现象，虽然目前标准的极早期暴涨的半经典理论中并不是引力自身的不稳定性造成的，而是通过引入暴涨子 (inflaton) 等机制来产生的，但其实也有很多通过类似引力共形不稳定性的机制来导致极早期暴涨的讨论。由于目前标准的 Einstein 引力理论中，对极端尺度（比如极早期极高曲率）的量子引力现象还不能有较好的说明，所以这种可能性仍是存在的。这一节里，我们就试图从本文讨论的引力的框架出发来看是否真的存在这种共形不稳定性的问题，以及是否真的会导致理论在量子层面无法自洽的灾难。

从本文的有效引力我们看到，引力的配分函数 (91) 中的相对熵 $\tilde{N}=N-N_*$，在对 τ 尺度做导数导出有效作用量 (113) 的时候

$$\frac{d}{d\tau}N(M^D,g)=\mathcal{F}(M^D,g,u)=\int_{M^D}dV(X)\,u\left(R+|\nabla\log u|^2\right)$$

我们看到 u 密度就类似的扮演了共形因子 (平方) 的角色，其动能项同样带有一个“错误”的符号。一般的，我们前面看到 (31)，u 密度描写了对局部时空体积元的共形缩放，而不改变局部时空的形状。在密度几何中，对 u 密度的选择存在一个规范任意性，选择不同的 u 密度只是选择了不同的规范，这种规范任意性其实就是对几何的共形变换的任意性。由于我们对赝 Riemann 时空的体积元采用了绝对值的定义的推广 (70)，使得这种定义下的 u 密度在赝 Riemann 时空和在所谓的 Wick 转动的 Riemann 时空下都是相同的，而不会出现额外的虚数因子。这样的做法保证了通过 Shannon 熵 N 导出有效作用量是，Shannon 熵的导数给出的 F-函数的形式和 Perelman 定义的 Riemann 的 3-空间的 F 泛函的形式不变，甚至所有其他 Perelman 泛函的形式都不改变，只

是将 Perelman 给出的 Riemann3-空间的所有泛函形式直接推广到了 $D=4$-赝 Riemann 时空中去。所以在这个引力理论中，这个 u 密度给出的类似引力的共形自由度的动能项给出的仍然是一个表面上"错误"的符号。这个"错误"的动能项符号导致的可能的共形不稳定性，不仅在 Perelman 所讨论的 Riemann 的情况下是存在的，在时空是赝 Riemann 的情况也是同样存在的。

但是在这里，时空和引力系统的共形稳定性并不简单的由动能项前面符号的正负来决定。因为我们看到其实 F 泛函其实是赝 Riemann 时空上的算子 $-4\Delta+R$ 的最低本征值

$$\xi_0(g)=\inf\left\{\mathcal{F}(M^D,g,\Psi_0)=\int_{M^4}dV(X)\,\left(R|\Psi_0|^2+4|\nabla\Psi_0|^2\right),\quad \text{并且}\quad \lambda\int|\Psi_0|^2dV(X)=1\right\} \tag{148}$$

其中 $\Psi_0(X)=\sqrt{u(X)}=e^{-\frac{1}{2}f(X)}$ 是 u 密度矩阵对应的波函数，也可以看作是算子 $-4\Delta+R$ 的最低本征函数

$$(-4\Delta+R)\,\Psi_0=\xi_0\Psi_0$$

由于标架场在高斯近似下作为谐振子的基态波函数是纯实数的，所以 Ψ_0 其实也就是标架场的基态波函数 (参见 IV B)，类似于上面的共形因子 Ω。

这个本征方程就类似于 Schrödinger 方程的能量定态方程。而这个本征值 $\xi_0(g)$ 的符号取决于 $-4\Delta+R$ 中的拉普拉斯算子 Δ 和标量曲率 R 本征值之间的竞争，或者说取决于共形因子 Ψ_0 的动能项 $|\nabla\Psi_0|^2$ 和势能项 $|\Psi_0|^2R$ 之间的竞争，完全类似于在 Schrödinger 方程中的动能项和势能项之间的竞争，而不仅仅简单的取决于动能项前面的符号是否是"正确"的。

值得指出的是，Ψ_0 不同于 $-\Delta+R$ 的本征函数 ψ_i（47），ψ_i 是不包含混态密度 $e^{-\tau\zeta_i}$ 的纯态波函数，而 $\Psi_0=\sqrt{u}$ 是包含了混态密度的有效"混态波函数"。

因此是否会出现量子时空的共形不稳定性，取决于算子 $-4\Delta+R$ 的最低本征值 $\xi_0(g)$ 的符号，换言之取决于本征方程是否有束缚态的本征函数 Ψ_0。u 密度作为本征函数 Ψ_0 的平方，从共轭热方程 (41) 能看出，当本征值为正 $\xi_0(g)>0$ 的时候，比如局部曲率 R 是正的或者"错误"符号的动能项主导，那么 u 密度将沿着 t 正向流动的方向逐渐变大。由于 $u(X)$ 密度是时空 X 点附近局部体积元的倒数 (31)，因此在正本征值时 X 点附近的时空体积元将随着正向 Ricci 流逐渐收缩。物理上来说，这个 $\xi_0(g)>0$ 的局部时空上的结构会在观测中逐渐收缩到非常小的尺度和非常高的曲率，我们称这样的局部时空结构是 Ricci 流不稳定或者共形不稳定的。所以应该注意，我们这里所讨论的共形不稳定性并不是时空的动力学不稳定性，而是 Ricci 流演化观测意义上的不稳定性。具体的例子就是 Ricci 流有可能会在一些局部 $\xi_0(g)>0$ 的时空区域，发展出来高曲率奇异性的梯度收缩 Ricci 孤立子 GSRS 的局部结构。这些局部 GSRS 的结构就是由于局部动能和曲率势能的竞争形成的共形不稳定产生的。我们后面会看到这种局部共形不稳定性在极早期宇宙中扮演非常重要的角色，会导致极早期宇宙空间的暴涨，是一种非常自然的导致极早期暴涨的机制（见 VI H)。

相反的，而当本征值是非正的时候，$\xi_0(g)\leq 0$，u 密度会在正向 Ricci 流中保持不变或者逐渐减小，导致局部时空体积在 Ricci 流下保持不变或者膨胀，在对时空重标度下，这些局部的时空结构将在 Ricci 流下得以保持，我们称这样的局部时空结构是 Ricci 流稳定或者共形稳定的，会在大尺度时空观测中得以保持。一个典型的例子就是 $R=0$ 的平坦时空几何，是一种梯度稳定 Ricci 孤立子（gradient static Ricci soliton)，就是共形稳定的。

值得指出的是，$\Psi_0=\sqrt{u}$ 和共形因子的类比是严格的，而 F 泛函和 Einstein-Hilbert 作用量的类比则只是形式上的。从严格的角度来说，这个引力的有效作用量其实来自尺度依赖的相对 Shannon 熵 $\tilde{N}=N-N_0$，所以这个引力理论到底是否真的出现 Einstein-Hilbert 作用量的"无下界"问题，还是需要严格的看相对熵泛函，这个问题我们留到下一节讨论时空的塌缩性问题再仔细的讨论。从是 Ricci 流的方面，相对熵作用量和 Einstein-Hilbert 作用量就已经很不相同了。相对熵是存在梯度流的，而经典的 Einstein-Hilbert 作用量泛函并不存在梯度流。我

们知道积分测度中不含 u 密度的 Einstein-Hilbert 作用量泛函的变分为

$$\delta\int d^4X\sqrt{|g|}R=\int d^4X\sqrt{|g|}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}$$

因此 Einstein-Hilbert 泛函对度规的梯度是 Einstein 张量，因此我们得到它的梯度流为

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t}=-R_{\mu\nu}+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

这个方程既不是抛物型方程也不存在短 t 的解。经典 Einstein-Hilbert 泛函的梯度流是没有解的，就像不存在逆时间方向的热方程的解一样，这样的解熵是减小的，需要额外的输入新的信息。这就是为什么我们在 (I) 中曾提到经典引力不可重整的困难，即对经典 Einstein-Hilbert 作用量做重整化的时候，为了将计算中得到无穷大吸收掉，似乎需要永无止境的给作用量输入额外的项和额外的参数。F 泛函也是存在梯度流的，原因在于 F 泛函的体积元 d^4Xu 是 Ricci 流不变的，而不像 Einstein-Hilbert 泛函的体积元 $d^4X\sqrt{|g|}$ 是 Ricci 流改变的，F 泛函的梯度流就没有了 $-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ 项，它的梯度流就是 Ricci 流，而本征值 ξ_0 的符号决定了 Ricci 流定性的方式是稳定还是不稳定的。而 Einstein-Hilbert 泛函没有梯度流，因此错误的动能项符号带来的后果是灾难性的，这意味着 Einstein-Hilbert 泛函在量子层面根本无法完善定义，在量子层面必须考虑超越 Einstein-Hilbert 作用量的其他的贡献。

相比近似决定时空的经典 Einstein-Hilbert 作用量，我们看到其实算子 $-4\varDelta+R$ 在量子时空和引力系统中扮演了更为重要的角色，从这个算子出发或者类似的从 Shannon 熵出发，都可以得到超越 Einstein-Hilbert 作用量的项。考虑到 $-\tau\langle\Psi_0|(-4\varDelta+R)|\Psi_0\rangle\sim-\tau\mathcal{F}\sim-N$ 给出的 Shannon 熵贡献了引力配分函数 (91) 最主要的引力动力学的部分，于是我们可以考虑 $(4\pi\tau)^{D/2}\mathrm{tr}e^{-\tau(-4\varDelta+R)}\sim e^N$ 在小 τ 的时候，可以展开成 Schwinger-DeWitt 级数

$$(4\pi\tau)^2\mathrm{tr}e^{-\tau(-4\varDelta+R)}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{B}_n\tau^{\frac{n}{2}},\quad(\tau\to0)$$

其中系数 $\mathscr{B}_n$ 就不仅包含了 Einstein-Hilbert 作用量 ($n=2$) 还包含了所有边界项 ($n=$ 奇数) 及其引力在高能时所有可能的超越 Einstein-Hilbert 理论的修正 ($n\geq4$)

$$\mathscr{B}_0=\int_{M^4}d^4X\sqrt{|g|}$$
$$\mathscr{B}_2=\int_{M^4}d^4X\sqrt{|g|}R$$
$$\mathscr{B}_4=\int_{M^4}d^4X\sqrt{|g|}\left[-\frac{4}{5}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+\frac{4}{5}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}+\frac{2}{5}\varDelta R+\frac{1}{2}R^2\right]$$

G. 时空局部非塌缩和 W 熵泛函

上一节中，我们看到虽然这样的局部共形不稳定的 GSRS 的局部构型在时空中体积会收缩到很小，但这样的局部共形不稳定性是否会让局部时空无限塌缩下去，导致局部时空塌缩成体积为 0 的没有结构的点，甚至导致整个时空都灾难性的塌缩成体积为 0 的点，以至于局部或整个时空几何的结构都完全丢失？对于后一个问题，在经典广义相对论中有所谓的正质量定理，保证了经典时空的整体稳定性，但在这个定理在考虑了量子涨落之后会收到这样的影响?

从 F 泛函的单调性 (85) $\frac{d\mathcal{F}}{dt}\geq0$ 我们看到，无论在任何局部曲率下，本征值 ξ 随着正向 Ricci 流是单调非减的。因此如果局部 $\xi>0$ 共形不稳定局部体积逐渐收缩，直到局部收缩成一个 GSRS 构型，这时 ξ_0 会收敛到 $\mathcal{F}_*=\frac{D}{2\lambda(t_*-t)}$，但这个值仍然还会随 $t\to t_*$ 而发散而不会有上限，因此 ξ 如果是正的，那么似乎它会随着 Ricci

流越来越大，局部体积收缩得越来越小，因此我们还是无法从 F 泛函看出局部近乎奇异性的区域的体积是否会塌缩成 0 体积的点。局部体积是否塌缩是 F 泛函所无法讨论的。我们这一节将通过 Perelman 引入的另外一种更适合的单调 W 熵泛函来讨论，因为相比带有量纲的 F 泛函，一个无量纲的标度不变的泛函更适合于讨论在 $t \to t_*$ 的过程中几何局部临近奇异性的情况。并且现在考虑的也不再是黎曼几何 (M,g) 的局部塌缩性，而是满足 (44) 的密度黎曼几何 (M,g,u)，密度 u 对几何的模糊化虽然没能完全抹掉局部黎曼几何奇异性的发生，但在一定程度上削弱了这种局部几何奇异性的发生。

在 $t \to t_*$ 的过程中，我们可以这样更严格的来定义所谓的时空"局部塌缩"。首先这个体积的局部塌缩需要被定义成某种无量纲的相对的体积比趋于 0，而不是绝对的体积趋于 0。所以最自然的，用一个非平坦度规 g 的局部测地时空球（geodesic ball）的体积，去和一个相同半径下，在平坦的实验室的标准时空球的体积来比。为了一步一步的逼近奇异性尺度，我们可以给定一个尺度逼近奇异性尺度 t_* 的无限序列 $(i = 1, 2, 3, ...)$。在某个逼近的有限尺度 t_i，$(t_i \to t_*)$，局部弯曲的、闭合的、有界的时空球也有相应的有限半径序列 $r_i \in (0, \infty)$。我们认为相应尺度 t_i 下的局部的时空球半径很小曲率很大，但这里的半径小和曲率大只能跟时空 Ricci 流的粗粒化尺度来比。因此我们说，这个时空球的半径平方和时空的分辨率尺度 t_i 之比 r_i^2/t_i 现在有一个一致的上界，意思是说，这个时空球在有限尺度 t_i 是如此之小以至于是时空最小能分辨的时空球，因此在有限尺度 t_i 这个局部的 Riemann 曲率又是如此之大，但却在有限尺度是有限，比如被时空球半径的上界限制，$|Rm\,(g(t_i))| \le r_i^2$。如果这个局部度规为 $g(t_i)$ 以 r_i 为半径的时空球的体积 $\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^4_{g(t_i)}(r_i))$ 和平坦度规下相同半径 r_i 的标准实验室时空球体积 $\omega_4 r_i^4$ (ω_4 是单位 4-球体积）的局部体积比在这个无限序列中趋于 0

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{B}^4_{g(t_i)}(r_i)\right)}{\omega_4 r_i^4} \stackrel{?}{=} 0$$

我们就说这个时空在有限尺度 t_i 是"局部塌缩"的。从这个定义可以看出，如果局部塌缩，那么局部时空的体积相对于标准实验室时空观察者来说就真的缩成没有大小的 0 体积了，这个局部时空区域真的被抹掉了，无论你将这个局部区域逆向流放大到什么程度，都无法看到它，因为它真的已经变成了一个没有结构的点了。相反的，如果时空局部非塌缩，则在这个趋于奇异尺度 t_* 的过程中，在有限尺度 t_i 时空局部的相对体积都不会真的缩成一点，而是在有限尺度 $t_i \to t_*$ 下总是存在一个正则的有结构的时空区域，只要你把局部时空做逆向流放大和重标度到足够大，你就一定能看到它的结构。

要去看时空的局部不稳定是否会造成上面所述意义上的局部塌缩，我们来考虑 Perelman 引进的无量纲、标度不变的 W 熵泛函。为了让 F 泛函变成无量纲的，最简单的是把从奇异尺度 t_* 出发的逆流参数 $\tau = t_* - t$ 乘到 F 泛函里面。同时考虑让这个无量纲量 $\tau\mathcal{F} \sim -\log u$ 在平坦的时候借助 $f - D$ 来让它平凡的归零，这样就把 F 泛函推广成了 W 熵泛函，

$$\mathcal{W}(M^D, g, u) = \int_{M^D} dV(X)\, u \left[\tau\left(R + |\nabla f|^2\right) + f - D\right]$$

我们在 (VIB) 中的 (93) 也看到这个 W 熵泛函随 t 总是是单调增加的 $\frac{d\mathcal{W}}{dt} \ge 0$，不依赖于任何曲率假设，所以称它为熵，是相对 Shannon 熵 $\tilde{N}$ 关于 τ^{-1} 的勒让德变换。当且仅当局部时空是 GSRS 构型，即 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_* = \frac{D}{2\lambda(t_* - t)}$ 的时候这个熵达到极大常数值。并且这个 W 熵是标度不变的，当你同时重标度 τ 和 g，将 Ricci 流尺度 τ 重标度成 1，同时度规重标度成 $\tau^{-1}g$，那么 W 熵泛函不变 $\mathcal{W}(g,u,\tau) = \mathcal{W}(\tau^{-1}g, u, 1)$，方便我们将临界奇异性的局部度规放大来考虑它的塌缩性。

由于 u 密度的选择有规范任意性（坐标系选择的任意性），我们可以借助某个局部的 u 密度来将 W 熵泛函表示到局部，来探测这个局部共形不稳定收缩的时空区域。更具体的说，我们可以选 $u(X,t)$ 是一个以我们关心的时空点 X_c 为中心，时空球半径 $r_i \to 0$ 为很小的宽度的高斯函数 $u(X, r_i) = \lambda^{-1}(2\pi r_i^2)^{-2} e^{-\frac{(X-X_c)^2}{2r_i^2}}$，也就是

$f_i(X) = \frac{(X-X_c)^2}{2r_i^2} - \log(r_i^4) + \text{const}$，来计算 W 熵泛函得到

$$\mathcal{W}\left(g(t_i), \frac{1}{\lambda(2\pi r_i^2)^2} e^{-\frac{(X-X_c)^2}{2r_i^2}}, t_i\right) \approx -\log(r_i^4) + \text{const}$$

用以探测 X_c 附近区域在尺度 t_i 时的塌缩性。显然如果局部塌缩

$$\frac{\text{Vol}\left(\mathbb{B}^4_{g(t_i)}(X_c, r_i)\right)}{\omega_4 r_i^4} \to 0 \quad \text{就有} \ -\log(r_i^4) \to -\infty$$

也就是说，如果这个局部时空越是塌缩，那么局部 u 密度计算得到 W 熵泛函的值就越负。但是，考虑到 W 熵泛函随 Ricci 流的单调性 $\frac{d\mathcal{W}}{dt} \geq 0$，因为这个局部时空区域的度规从初始尺度开始 Ricci 流演化的时候，W 熵泛函带有初始有限值 (上下有界)，于是在演化了有限 Δt 后，由于单调非减，仍然是有下界的，所以不可能会出现 W 熵泛函无限负的局部塌缩现象。因此 W 熵泛函的单调性实际上就排除了在有限尺度局部无限塌缩的出现。

这个现象导致了 Perelman 的 3-空间在有限 Ricci 流尺度下局部非塌缩的定理。而这个定理现在在恰当定义了 4-赝 Riemann 时空局部体积之后，同样可以推广到 4-赝 Riemann 时空几何的 Ricci 流。这个局部非塌缩的定理，意味着就算在时空局部 $\xi > 0$ 是共形不稳定的，随着 Ricci 流体积会逐渐缩小，但是在有限 Ricci 流尺度 $t \to t_*$ 的过程中，虽然局部体积会逐渐缩得非常小，但在时空球半径 $r \sim O\left(\sqrt{t_* - t}\right)$ 的尺度塌缩不会真的发生，这个局部时空区域总是不会塌缩成完全无结构的点。这个局部时空球的体积相对于对应相同半径的标准实验室平坦时空体积来说，体积比总是大于 0 的

$$\frac{\text{Vol}\left(\mathbb{B}^4_{g(t)}(r)\right)}{\omega_4 r^4} > 0$$

因此只要你将这个缩得很小但不塌缩的局部时空区域做放大和重标度，你总能得到一个正则的时空区域。而这个无量纲的 W 熵泛函在这个区域的值就描写了这个区域和放大尺度无关的某种拓扑不变量。虽然 Ricci 流的粗粒化过程很多时空细节的信息会逐渐丢失，但最后这个拓扑的信息是不会最终丢失的，只要这个局部没有无限的塌缩，这个不会最终丢失的拓扑信息就由 W 熵泛函在这个区域的常数极值给出。

正是得益于 Ricci 流下局部非塌缩，Perelman 得以排除掉了 Hamilton 无法排除的 3-空间的雪茄型孤立子（由于 3-空间雪茄型孤立子是局部塌缩的），扫除了通过 Ricci 流来证明 Poincare 猜想的 Hamilton 纲领的最后障碍。同时也正由于 Ricci 流下局部非塌缩，当几何局部不稳定出现瓶颈等奇异性的时候，总能通过局部放大找到局部的正则区域，数学文献中称为典型邻域 (typical neighbor)，在看清了这个区域的拓扑之后，在这个正则区域通过手术，切掉这个无法继续 Ricci 流演化的奇异部分，粘上其他好的部分，就能让 Ricci 流继续演化下去，直至最后流到最终的 Ricci 流终点。这样我们最后就得到了 Ricci 流终点的一个简单流形，加上那些之前通过手术切除的但由于非塌缩而保留了拓扑信息的局部流形块，因此一个任意的初始流形所包含的所有拓扑信息都被 Ricci 流的 Hamilton 纲领得到了。

这个 W-泛函单调性给出的非塌缩性在物理上保证了时空在量子层面虽然会出现局部共形不稳定，但都是量子涨落下非塌缩的。不仅对于局部时空是这样，前面论证也可以适用于整个时空，整个时空也是在量子涨落下非塌缩的。这在经典层面由广义相对论的正质量定理保证，在量子层面则类似的由 W 熵泛函的单调性 $\frac{d\mathcal{W}}{dt} \geq 0$ 或者有下界性来保证。其实同样的结论也能从约化密度 $\tilde{V}$ 或相对 Shannon 熵 $\tilde{N}$ 泛函的单调性得到。我们有 (84)

$$\tilde{N}(M^D) = -\log Z_p = \int_{M^D} dV(X)\, u\left(f - \frac{D}{2}\right) \leq 0$$

因此容易从引力的配分函数 (91) $Z \sim e^{\lambda\tilde{N}}$ 看出，现在引力的配分函数是有上界的，有效作用量是正定有下界的，并不会出现 Einstein-Hilbert 作用量 (147)"无下界"(bottomless) 产生的配分函数发散的问题。正因为如此，时空相对熵的单调性给出的类似的时空 H 定理，不仅对于这个量子时空标架场的完善定义很重要，也保证了整个时空几何在量子层面的稳定性和这个引力理论在量子层面的完善定义。

H. 极早期宇宙

1. 极早期宇宙暴涨的新机制

在上一节 (VI G) 中我们初步看到了，在一些特定初始条件下，如果时空的 Ricci 流由于局部共形不稳定性而出现局部奇异性，并不会真的出现局部塌缩成没有结构的点，而是总能在临近时空奇异点的附近，通过局部放大并重标度而找到一个局部正则的时空区域。我们这一节就来看这样一个在局部时空中由于共形不稳定性而导致局部奇异性出现的具体的例子：极早期宇宙 [9]。

之前 (VI C) 和 (VI D)Ricci 流演化的是时空平权的正曲率的宇宙晚期度规 (101)，其中尺度因子只是 Ricci 流尺度 τ 的函数，而不是时空坐标的函数，这样的初始时空的 Ricci 流演化是无奇异性（non-singular）的，虽然 Ricci 流好像会将这个时空整体缩成一点，但通过宇宙常数作为抵消项，可以将整体时空重标度成一个有限相对体积比的时空。我们也已经看到这会带来晚期加速膨胀和宇宙常数。

如果在时空度规不再是晚期 (101) 的时间和空间平权，而是空间上均匀各向同性，但空间尺度因子 $\mathbf{a}(X^0,\tau)$ 是随物理时间 X^0 演化（同时也随 Ricci 流尺度演化）的膨胀宇宙的 Friedman-Roberson-Walker（FRW）度规

$$ds^2 = -\left(dX^0\right)^2 + \mathbf{a}^2(X^0,\tau)\left[\left(dX^1\right)^2 + \left(dX^2\right)^2 + \left(dX^3\right)^2\right] \tag{149}$$

对于这样的时空初始条件，Ricci 流不仅在流向红外大尺度的时候会逐渐抹掉空间上的局部不均匀性使得空间越来越均匀各向同性，正如宇宙学原理所断言的那样，而且还会逐渐将空间尺度因子 $\mathbf{a}(X^0,\tau)$ 在某个红外长程的 Ricci 流奇异尺度 $t \to t_*$（或 $\tau = t_* - t \to 0$）下，在某个物理时间点附近（不失一般性的可定义其为物理时间原点）$X^0 = 0$ 缩成一个极高曲率的奇异点

$$\mathbf{a}(X^0 \to 0, \tau \to 0) = 0$$

我们将这个红外长程的奇异尺度下的这个局部物理时间原点，解释为宇宙的极早期的时间奇点。

不同于时空平权的晚期宇宙，这个局部时间原点附近（极早期），空间上所出现的奇异性并不能通过宇宙常数这样的抵消项整体重标度而消除。这样的时空局部高曲率的奇异点是 Ricci 流演化一般的时空初始条件时，通常都会出现的情况。在接近这个奇异尺度的时间原点的时候，时空曲率会变得非常大，甚至可能导致 Ricci 流作为完整时空重整化群流的高斯近似的失效，由于那些曲率的高幂次项都可能开始贡献到流方程中。但目前宇宙极早期原初扰动的观测似乎显示，极早期原初扰动几乎还是高斯的，非高斯性涨落被压得非常低。在这种情况下，如果我们只关心产生这些近乎高斯的原初扰动所在的极早期时间区域，那么可以认为高斯近似的 Ricci 流仍然还是研究极早期宇宙原初涨落极好的近似，那些曲率高幂次项所产生的非高斯涨落至少在现象学的层面上可以被安全的忽略掉。由于上一节给出的局部非塌缩定理，在宇宙极早期虽然空间尺度因子会趋于缩成很小，但在有限尺度下，总存在非常接近时间原点时高曲率附近带有正曲率的所谓的“典型邻域”的时空区域，这样的时空曲率在被充分重标度后成为一个越来越接近梯度收缩 Ricci 孤立子解（GSRS）的正则的 (regular) 自相似时空构型 (94)。这个局部非塌缩定理给出的正则的典型邻域的存在性，是我们通过这个理论研究极早期宇宙及其上面的原初扰动的数学基础。

在 FRW 度规 (149) 下 GSRS 方程 (94)

$$R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f = \frac{1}{2\tau} g_{\mu\nu}$$

的时间和空间分量分别写成

$$\begin{cases} 3\frac{\ddot{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}} + \ddot{f} = \frac{1}{2\tau} \\ 2K - 2\dot{\mathbf{a}}^2 - \mathbf{a}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{a}\dot{\mathbf{a}}\dot{f} = \frac{1}{2\tau}\mathbf{a}^2 \end{cases}$$

其中 $\dot{a}$ 代表对物理时间 X^0 求导，K 为空间曲率。在临近奇异尺度，我们假定 f 函数在趋于时间原点时有平缓的一阶时间导数

$$\dot{f}(X^0 \to 0) \approx 0 \tag{150}$$

于是在时间原点附近有可以简化的写成

$$\begin{cases} 3\ddot{\mathbf{a}} - \frac{1}{2\tau}\mathbf{a} = 0 \\ 2\dot{\mathbf{a}}^2 + \mathbf{a}\ddot{\mathbf{a}} - 2K - \frac{1}{2\tau}\mathbf{a}^2 = 0 \end{cases} \tag{151}$$

从第一行的方程就看到空间尺度因子随物理时间 X^0 指数的暴涨

$$\mathbf{a}(X^0) = \mathbf{a}(0)e^{H_\star X^0} \tag{152}$$

其中空间暴涨的哈勃速率是

$$H_\star \equiv \frac{\dot{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}} = \sqrt{\frac{1}{6\tau_\star}}, \quad (\tau_\star \to 0) \tag{153}$$

显然 $\tau_\star \to 0$ 是奇异性的发散哈勃速率，$\tau_\star \neq 0$ 是非常小但有限非零的暴涨相关的特定尺度，主要稍微偏离一点奇异尺度 0，$H_\star$ 就是这个尺度下非常大但有限的哈勃速率。下文中物理量如果带上下标“$\star$”都代表在时间原点附近的典型邻域上的暴涨相关的特定值。

在这个高斯近似下的时空 Ricci 流理论中，无法从第一性原理给出究竟 $\tau_\star$ 有多接近奇异尺度 $\tau = 0$，需要通过一个额外的输入参数：e-folding 数 $\mathcal{N}$ 来有效的描写。但在这个理论中，不需要额外的假设暴涨子（另一种形式的暗能量）来驱动极早期暴涨的发生，而是通过完全不同的机制。即本质上来源于时空的量子涨落，Ricci 流会在红外长程下的极早期时间原点附近演化出近乎 GSRS 的自相似的时空构型，即一种 Ricci 曲率和度规成正比的 deSitter 时空构型，正是这种 deSitter 时空构型给出在极早期的空间近乎指数暴涨的构型。随着尺度因子 $\mathbf{a}(X^0)$ 的暴涨，(151) 的第二行的空间分量方程中的空间曲率 K 将逐渐被膨胀压低，进而使得空间分量的方程的解也逐渐近乎给出和时间分量方程一致的指数膨胀解 (152)。

这个很接近奇异尺度的 $\tau_\star$，不仅给出极早期非常大但有限的哈勃速率 $H_\star$，而且也给出极早期的时空构型很接近自相似的 dsSitter 构型，所以自然的，也将给出也很接近标度不变的量子涨落。但是由于 $\tau_\star$ 和奇异尺度有一个微小的偏离，所以这个构型并不是严格 deSitter 的，上面的量子涨落也不是严格标度不变的。这个和严格 deSitter 构型的偏离可以给出标准暴涨中一系列所谓的“慢滚”参数，虽然其实这里并没有暴涨子真的在势能上慢滚，只是出于历史的原因，我们在这里仍然把描写哈勃速率随时间的变化也称为慢滚参数。

如果认为 $\tau = 0$ 的奇异尺度下极早期的时空是严格 deSitter 的，这时 (152) 是一个严格常数哈勃速率的 deSitter 解 $\mathbf{a}(X^0, \tau = 0)$。由于 $\tau_\star$ 是一个小量，我们可以将尺度因子 $\mathbf{a}(X^0, \tau_\star)$ 在严格 deSitter 解附近做展开，展开到 $\tau_\star$ 的第一阶得

$$\mathbf{a}(X^0, \tau_\star) = \mathbf{a}(X^0, 0)\left[1 + \mathbf{b}_1\tau_\star + O(\tau_\star^2)\right], \quad (\tau_\star \to 0,\ X^0 \to 0)$$

将其带入 Ricci 流方程

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{a}^2(X^0, \tau) = 2\left(2\dot{\mathbf{a}}^2 + \mathbf{a}\ddot{\mathbf{a}}\right) = 2\mathbf{a}^2\mathbf{b}_1 + O(\tau^2)$$

并考虑到 $\lim_{\tau\to 0}\dot{\mathbf{a}}/\mathbf{a} = H_{\tau\to 0}$ 以及 $\dot{H}_{\tau\to 0} \ll H_{\tau\to 0}^2$ 我们就得到第一阶得展开系数

$$\mathbf{b}_1 = 3H_{\tau\to 0}^2$$

因此

$$\mathbf{a}(X^0, \tau_\star) = \mathbf{a}(0)e^{H_{\tau\to 0}X^0}\left[1 + 3H_{\tau\to 0}^2\tau_\star + O(\tau_\star^2)\right] \approx \mathbf{a}(0)e^{H_\star(X^0, \tau_\star)X^0}$$

如果考虑到 $3H_{\tau\to 0}^2\tau_\star \approx O\left(3H_\star^2\tau_\star\right) = \frac{1}{2}$，因此展开项相比第一项要小，是一个自洽的近似。于是近似到 $\tau_\star$ 的线性阶，我们就得到了哈勃速率随物理时间演化

$$H_\star(X^0,\tau_\star) = H_{\tau\to 0} + \frac{3\tau_\star H_{\tau\to 0}^2}{X^0} + O(\tau_\star^2)$$

使得在极早期，哈勃速率并不是一个严格的常数。在标准暴涨的术语中，慢滚参数定义为 $\epsilon = -\dot{H}/H^2$。一般这个慢滚参数还是随时间变化的，但如果认为暴涨的时间比较短，我们可以近似将其看作是一个在特定暴涨典型时刻（typical time）$X_\star^0$ 给出的暴涨期间的典型慢滚参数（常数）

$$\epsilon_\star \equiv \epsilon(X_\star^0) \equiv -\frac{\dot{H}_\star\left(X_\star^0\right)}{H_\star^2\left(X_\star^0\right)} = \frac{3\tau_\star H_{\tau\to 0}^2}{H_\star^2\left(X_\star^0\right)^2} \tag{154}$$

其中我们认为暴涨的典型时刻 $X_\star^0$ 大约比暴涨结束时刻 X_{end}^0 早（小）若干倍，之间的比值用另一个额外的输入参数

$$\gamma = \frac{X_{end}^0}{X_\star^0} > O(1) \tag{155}$$

来给出，因此 $X_\star^0 = \gamma^{-1}X_{end}^0 < X_{end}^0$。如果我们考虑哈勃速率 $H_{\tau\to 0} \approx H_\star = \frac{1}{\sqrt{6\tau_\star}}$ 和暴涨典型时刻 $X_\star^0$ 在暴涨期间都近乎是常数，那么我们就得到典型慢滚参数为

$$\epsilon_\star = \frac{3\tau_\star\frac{1}{6\tau_\star}}{H_\star^2\left(X_{end}^0\right)^2/\gamma^2} \approx \frac{\gamma^2}{2\mathcal{N}^2} \tag{156}$$

其中的 e-folding 数定义为

$$\mathcal{N} = \ln\frac{\mathbf{a}(X_{end}^0,\tau_\star)}{\mathbf{a}(0,0)} \approx H_\star X_{end}^0 \gg 1$$

观测上要求 $\mathcal{N} \approx (60 \sim 70)$ 是比较大的数。由于 $\gamma = O(1)$，$\mathcal{N} \gg 1$，所以 $|\epsilon_\star| \ll 1$，这在标准暴涨的术语中称之为慢滚条件，用来保证暴涨期间哈勃速率近乎是一个常数的指数膨胀。慢滚条件在标准暴涨理论中来源于近乎平坦的暴涨子的势能项，而在这里，则来自于非常接近奇异尺度 $\tau = 0$ 的暴涨特征尺度 $\tau_\star \to 0$，并且由于暴涨发生在 Ricci 流的非塌缩时空典型邻域半径 $X_\star^0 \gg \sqrt{\tau_*}$（是远大于而非一般大于的原因见下面的讨论）。

近乎 GSRS 或者 deSitter 的时空构型只是在时间原点附近的极早期才是好的近似奇点模型，而在 X^0 远离时间原点，这个局部的 GSRS 构型需要和时空的其余部分平滑的连接起来。在慢滚参数不再很小，而是接近 $O(1)$ 的时刻，$\epsilon(X_{end}^0) \approx 1$，就大约就可以看作是暴涨结束的时刻 X_{end}^0。在 (154) 中，我们看到哈勃速率 $H_\star$ 在暴涨期间逐渐的减小，于是慢滚参数逐渐的增大。当暴涨结束的时候 $H_{end} \ll H_\star \approx H_{\tau\to 0}$，于是慢滚参数 ϵ 最终变大到 $O(1)$ 的量级

$$\epsilon(X_{end}^0) \approx \frac{3H_{\tau\to 0}^2\tau_\star}{H_{end}^2\left(X_{end}^0\right)^2} \approx 1$$

于是这个暴涨结束的条件给出暴涨结束时间为

$$X_{end}^0 \approx \frac{H_{\tau\to 0}^2}{H_{end}^2}\sqrt{3\tau_*}$$

由于 $H_{\tau\to 0} \gg H_{end}$ 所以 $X_{end}^0 \gg \sqrt{\tau_*}$，由于 X_{end}^0 和 $X_\star^0$ 是同量级的，所以我们得到暴涨的典型时间 $X_\star^0$ 也远大于暴涨特征尺度 $\sqrt{\tau_*}$，因此我们就得到暴涨典型时间远大于非塌缩尺度 $O(\sqrt{\tau_\star})$ 的关系

$$\sqrt{\tau_\star} \ll X_\star^0 < X_{end}^0$$

这个关系保证了极早期暴涨发生在正则的时空典型邻域中，这是我们能自洽并有效的通过半经典的 GSRS 时空构型来模拟极早期宇宙暴涨的原因，这也是 Ricci 流非塌缩定理的要求。

由于几乎全部对极早期宇宙的可观测效应都来自于原初涨落，下面我们就在这个近乎 GSRS 构型的半经典时空背景上研究极早期宇宙产生的原初涨落，包括原初标量涨落和张量涨落，而矢量涨落由于其快速的衰减，不会出现在冻结的可观测涨落谱中。

注意到在这个框架中其实存在两种标量涨落，一种来自暴涨背景度规上的类-牛顿势 Φ 的涨落

$$ds^2 = -(1+2\Phi)\left(dX^0\right)^2 + \mathbf{a}^2(X^0,\tau_\star)(1-2\Phi)\,dX^i dX^i, \quad (0<\sqrt{\tau_\star}<X^0<X^0_{end})$$

另一种则来自暴涨期间几何密度背景 $u_\star(X^0)\equiv u(X^0,\tau_\star)$ 上的几何密度涨落 $\delta u(\mathbf{k},X^0)$

$$u(\mathbf{k},X^0) = u_\star(X^0) + \delta u(\mathbf{k},X^0)$$

其中 $\mathbf{k}$ 是 u 密度涨落的傅立叶模式。这两种标量涨落在观测上是不能区分的，他们会混合成一个规范不变的标量涨落

$$\delta\varphi \equiv -\delta u + \frac{\dot{u}_\star}{H_\star}\Phi$$

要研究新变量 $\delta\varphi$ 的涨落，我们可以将理论 (91) 的不动点作用量 $\frac{d\tilde{N}}{d\tau}=\tilde{\mathcal{F}}$ 展开到 $\delta\varphi$ 第二阶

$$\tilde{N} = \tau\tilde{\mathcal{F}} = \lambda\tau\int_{M^D} dV(X)\left[uR + \frac{1}{u}|\nabla u|^2 - \frac{D}{2\tau}u\right] = \tau_\star\left[S_0(H_\star,u_\star) + S_2(\delta\varphi) + ...\right]$$

其中 S_0 是背景度规 $g_\star$ 和背景密度 $u_\star$ 的贡献，S_2 是标量涨落 $\delta\varphi$ 的二阶项。我们看到这个作用量属于一类称之为“标量-张量引力理论”的有效作用量，而其中的几何密度就类似的扮演了标量场的作用。但是正如（VIF）中我们注意到的，这个 u 密度的动能项有一个“错误”的符号，形式上会导致这个半经典引力理论的共形不稳定性。在这里，正是这个共形不稳定性机制，导致了时空局部奇异性和 GSRS 构型的产生，以及极早期暴涨。

（1）我们看最低阶的作用量 $S_0(H_\star,u_\star)$。在暴涨时空背景中，由于 $\nabla u_\star(X^0)=\dot{u}_\star(X^0)$ 以及标量曲率 $R_\star = 6\left(2H_\star^2+\dot{H}_\star\right)$，所以我们可以将最低阶的不动点作用量 S_0 写成

$$S_0(H_\star,u_\star) = \lambda\int_{M^4} d^3\mathbf{X}dX^0\frac{1}{u_\star}\left\{\dot{u}_\star^2 + \left[6\left(2H_\star^2+\dot{H}_\star\right) - \frac{2}{\tau_\star}\right]u_\star^2\right\}$$

考虑到 (31) 积分测度 $d^3\mathbf{X}\frac{1}{u_\star}$ 其实是空间不变体积元 $d^3\mathbf{X}\mathbf{a}_\star^3$，因此不动点拉氏量

$$\mathcal{L}_0 = \dot{u}_\star^2 + \left[6\left(2H_\star^2+\dot{H}_\star\right) - \frac{2}{\tau_\star}\right]u_\star^2$$

的 Euler-Lagrangian 方程给出 $u_\star(X^0)$ 的运动方程，即 u 在 $\tau\to\tau_\star$ 时的共轭热方程

$$\ddot{u}_\star + 3H_\star\dot{u}_\star - 6\dot{H}_\star u_\star = 0 \tag{157}$$

在慢滚近似 $|\epsilon_\star|\ll 1$ 条件下，第一项 $\ddot{u}_\star$ 相比其他项就可以忽略，我们就得到

$$\frac{\dot{u}_\star}{u_\star} = \frac{2\dot{H}_\star}{H_\star} = -2\epsilon_\star H_\star \tag{158}$$

如果忽略慢滚 $\dot{u}_\star\sim O(\epsilon_\star H_\star u_\star)$ 和 $\dot{H}_\star\sim O(\epsilon_\star H_\star^2)$，那么就得到严格的 deSitter 暴涨 $12H_\star^2u_\star^2=\frac{2}{\tau_\star}u_\star^2$，给出暴涨哈勃速率 (153)。所以最低阶作用量再一次给出了一个慢滚的近乎 deSitter 的极早期暴涨时空背景 $g_\star$ 和背景几何密度 $u_\star$。

（2）下面来看涨落的平方阶作用量 $S_2(\delta\varphi)$，可以写成

$$S_2(\delta\varphi)=\frac{1}{2}\lambda\int_{M^4}d^3\mathbf{X}dX^0\mathcal{Z}\left\{\delta\dot{\varphi}^2-\frac{1}{\mathbf{a}^2}\left|\nabla\delta\varphi\right|^2+\frac{1}{\mathbf{a}^3\mathcal{Z}}\frac{H_\star}{\dot{u}_\star}\left[\mathbf{a}^3\mathcal{Z}\left(\frac{\dot{u}_\star}{H_\star}\right)^{\boldsymbol{\cdot}}\right]^{\boldsymbol{\cdot}}\delta\varphi^2\right\}$$

其中“$()^{\boldsymbol{\cdot}}$”表示对括号里的量求时间导数，另外有

$$\mathcal{Z}=\frac{1}{u_\star}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2H_\star}\frac{\dot{u}_\star}{u_\star}\right)^2}\approx\frac{1}{u_\star}\left(1+2\epsilon_\star\right)$$

其中用到了 (158)。

当 $u_\star=1$，$\epsilon_\star=0$ 的时候，退回到 $\mathcal{Z}=1$，这时 $S_2(\delta\varphi)$ 就退回到标准的标量场最小耦合的暴涨引力作用量，并导致涨落的标准的 Mukhanov-Sasaki 方程。这里 $S_2(\delta\varphi)$ 的 Euler-Lagrangian 方程就给出一个 $\mathcal{Z}$-修正的的 Mukhanov-Sasaki 方程

$$\delta\ddot{\varphi}+\frac{(\mathbf{a}^3\mathcal{Z})^{\boldsymbol{\cdot}}}{\mathbf{a}^3\mathcal{Z}}\delta\dot{\varphi}+\left\{\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{1}{\mathbf{a}^3\mathcal{Z}}\frac{H_\star}{\dot{u}_\star}\left[\mathbf{a}^3\mathcal{Z}\left(\frac{\dot{u}_\star}{H_\star}\right)^{\boldsymbol{\cdot}}\right]^{\boldsymbol{\cdot}}\right\}\delta\varphi=0$$

要求解这个方程，可以引入

$$\mathbf{v}(\mathbf{k},X^0)=\sqrt{\mathcal{Z}}\mathbf{a}\delta\varphi,\quad \mathbf{z}=\frac{\mathbf{a}}{H_\star}\sqrt{\mathcal{Z}\dot{u}_\star^2}\tag{159}$$

于是这个 $\mathcal{Z}$-修正的的 Mukhanov-Sasaki 方程就变成标准的形式

$$\mathbf{v}''+\left(\mathbf{k}^2-\frac{\mathbf{z}''}{\mathbf{z}}\right)\mathbf{v}=0$$

其中“$'$”表示对共形物理时间 $d\eta=\mathbf{a}^{-1}dX^0$ 求导。

和标准暴涨理论的考虑类似，这个方程，对于那些短波高频的涨落模式 $\mathbf{k}^2\gg\frac{\mathbf{z}''}{\mathbf{z}}$，$\mathbf{v}$ 是在视界内快速振荡的，而那些长波低频涨落模式 $\mathbf{k}^2\ll\frac{\mathbf{z}''}{\mathbf{z}}$，在视界外被冻结了，方程的解可以写成以共形时间 η 为变量的 Hankel 函数 $H_{\varrho}^{(1)}$ 的形式

$$\mathbf{v}_\mathbf{k}(\eta)=\frac{\sqrt{\pi|\eta|}}{2}e^{i(1+2\varrho)\pi/4}H_{\varrho}^{(1)}(\mathbf{k}|\eta|)$$

其中系数

$$\varrho^2=\frac{1}{4}+\frac{\mathbf{z}''}{\mathbf{z}}\eta^2$$

如果定义慢滚参数

$$\epsilon_\star\equiv-\frac{\dot{H}_\star}{H_\star^2},\quad \delta_\star\equiv-\frac{\ddot{u}_\star}{H_\star\dot{u}_\star},\quad \alpha_\star\equiv-\frac{\dot{u}_\star}{2H_\star u_\star}\tag{160}$$

并且它们被认为在暴涨期间近乎是不随共形时间变换的常数，那么从 (159) 就得到

$$\varrho^2=\frac{1}{4}+\frac{(1+\epsilon_\star+\delta_\star+\alpha_\star)(2+\delta_\star+\alpha_\star)}{(1-\epsilon_\star)^2}$$

这样从 $\mathbf{v}_\mathbf{k}(\eta)$ 解就能得到标量涨落的功率谱幅度为

$$P_{\delta\varphi}\equiv16\pi G\frac{\mathbf{k}^3}{2\pi^2}\left|\delta\varphi_\mathbf{k}\right|^2=\frac{16\pi G}{Q}\left[(1-\epsilon_\star)\frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(3/2)}\frac{H_\star}{2\pi}\right]^2\left(\frac{|\mathbf{k}\eta|}{2}\right)^{3-2\varrho}$$

其中 G 是牛顿常数，Γ 是 Gamma 函数。这个标量涨落的功率谱在跨越到视界外的时候冻结在 $\mathbf{k}=\mathbf{a}H_\star$。于是在慢滚近似下，能被观测到的冻结标量涨落功率谱幅度为

$$P_{\delta\varphi}=\frac{16\pi G}{Q}\left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^2\bigg|_{\mathbf{k}=\mathbf{a}H_\star}\approx\frac{4\pi G}{\epsilon_\star^2u_\star}\left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^2\bigg|_{\mathbf{k}=\mathbf{a}H_\star}\tag{161}$$

其中

$$Q = \mathcal{Z}\left(\frac{\dot{u}_\star}{H_\star}\right)^2 \approx \frac{1}{u_\star}(1+2\epsilon_\star)\left(\frac{\dot{u}_\star}{H_\star}\right)^2 \approx 4\epsilon_\star^2 u_\star$$

而标量涨落的谱指数是

$$n_s - 1 \equiv \frac{d\ln P_{\delta\varphi}}{d\ln \mathbf{k}} \approx -4\epsilon_\star - 2\delta_\star - 2\alpha_\star \tag{162}$$

其中用到了 (158) 和 (160)。

我们也可以类似的处理原初张量涨落。定义暴涨时空背景上的张量涨落 h_{ij} 为 $g_{ij} = \mathbf{a}^2(X^0,\tau_\star)(\delta_{ij}+h_{ij})$，其中 h_{ij} 可以分解成有两个独立的自旋态 h_p，$p=+,\times$，通过引入自旋张量基 e_{ij}^+ 和 $e_{ij}^\times$，可以将张量涨落写成

$$h_{ij} = h_+ e_{ij}^+ + h_\times e_{ij}^\times$$

通过和标量涨落类似的计算，在慢滚近似下，两种极化的张量涨落功率谱幅度得到

$$P_h \approx \frac{128\pi G}{u_\star}\left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)\Bigg|_{\mathbf{k}=\mathbf{a}H_\star} \tag{163}$$

同时张量涨落的谱指数是

$$n_t \equiv \frac{d\ln P_h}{d\ln \mathbf{k}} \approx -2\epsilon_\star + 2\alpha_\star \tag{164}$$

当然要得到功率谱 (161)(163) 和谱指数 (162)(164) 更具体的预言，我们需要在这个理论中对一些参数，比如 $u_\star$ 和 $H_\star$ 以及那些慢滚参数，进行更具体的估计。

（i）$u_\star$ 的估计。由于 (31)$u_\star$ 密度描写了暴涨期间空间体积元的和标准实验室空间体积的比，$u_\star = a_\star^{-3} \sim e^{-3H_\star X^0}$，因此

$$\lim_{X^0\to 0}\dot{u}_\star = -3H_\star \tag{165}$$

带入 (158) 就得到

$$\lim_{X^0\to 0} u_\star = \frac{3}{2\epsilon_\star} = a_\star^{-3}$$

因此在时间 X^0 比较短时给出

$$u_\star(X^0) \approx \frac{3}{2\epsilon_\star} - 3H_\star X^0, \quad (X^0 \to 0)$$

这个其实也是暴涨时共轭热方程 (157) 的解，这个解和还没有考虑慢滚的 (150) 条件是一致的，只给出一个 $O(\epsilon_\star)$ 的小修正。

有了 $u_\star$ 我们就可以估计另外两个慢滚参数 (160) 了

$$\delta_\star \equiv -\frac{\ddot{u}_\star}{H_\star \dot{u}_\star} = -\frac{-3\dot{H}_\star}{H_\star(-3H_\star)} = -\frac{\dot{H}_\star}{H_\star^2} = \epsilon_\star \tag{166}$$

$$\alpha_\star \equiv -\frac{\dot{u}_\star}{2H_\star u_\star} = -\frac{-3\dot{H}_\star}{2H_\star \frac{3}{2\epsilon_\star}} = \epsilon_\star \tag{167}$$

于是带入 (156) 和 (162) 就得到

$$n_s = 1 - 8\epsilon_\star \approx 1 - \frac{4\gamma^2}{\mathcal{N}^2} \approx (0.91 \sim 0.99) \tag{168}$$

如果我们取 $1<\gamma<9$ 描写暴涨典型时刻和暴涨结束时刻之间的比值，取 e-folding 数 $\mathcal{N}\approx 60$ 的话。要得到观测上的最佳拟合 $n_s \approx 0.96$ 大约需要 $\gamma \approx 6$，这个估计和我们之前的预先估计，暴涨结束时刻大约是典型时刻的若干倍 (155) 是自洽的。带入 (164) 也给出

$$n_t = -2\epsilon_\star + 2\alpha_\star \approx -2\epsilon_\star + 2\epsilon_\star = 0$$

因此这个理论在慢滚近似下所给出的张量涨落谱是 $O(\epsilon_\star^2)$ 阶，近乎是标度不变谱，比标准暴涨给出的有更低的谱指数，这是这个理论给出的一个预言。

（ii）$H_\star$ 的估计。我们从 Perelman 的工作中看到，Ricci 流理论中有一个非常自然的比较几何的解释，其中局部的体积比较在几何分析中扮演着关键的角色。暴涨期间非常大的哈勃速率是由时间原点附近的体积或者尺度因子 $\mathbf{a} \to 0$ 的奇异性带来的。而描写在极早期尺度因子有多接近奇异点是有效的通过 e-folding 数来给出的，$\mathbf{a}_\star \sim e^{-\mathcal{N}}$。而我们也知道，这个引力理论最自然的特征能标是比较低的临界密度 $\lambda \approx (10^{-3}\text{eV})^4$，因此暴涨期间的哈勃速率最自然的估计是

$$H_\star \approx \lambda^{1/4}\mathbf{a}_\star^{-1} \approx \lambda^{1/4}e^{\mathcal{N}} \approx \left(10^{14} \sim 10^{18}\right)\text{GeV}$$

当取 $\mathcal{N} = (60 \sim 70)$。这个估计和标准暴涨模型中可接受的估计是一致的。这个估计相当于一种 Ricci 流中对局部曲率和局部体积比的 Harnack 估计。这个对较早期加速膨胀的哈勃速率的估计，给出了一种统一的理解极早期暴涨和晚期加速膨胀的图像，并理解极早期暴涨的能标 $O(H_\star)$ 和晚期加速膨胀能标 $O(\lambda^{1/4})$ 相差如此巨大的原因：极早期的局部高曲率来自于，早期时空不平权时，时间局部原点附近的空间体积收缩（pinching）和曲率爆破（blow up），空间的收缩由 $e^{\mathcal{N}} \gg 1$ 给出；而晚期加速膨胀则是来自于，晚期时空平权时，$O(\lambda)$ 的抵消项抵消时空全局收缩，时空全局的收缩由约化体积 $\tilde{V}(M^4_{UV}) = e^{\nu} \approx O(1)$ 给出。

有了 $u_\star$ 和 $H_\star$ 的估计，并结合另外两个输入参数，如果取 $\gamma \approx 6$ 和 $\mathcal{N} \approx 60$，我们就得到与观测一致的标量涨落谱幅度 (161)

$$P_{\delta\varphi} \approx \frac{8\pi G}{3\epsilon_\star}\left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)\bigg|_{\mathbf{k}=\mathbf{a}H_\star} \approx 10^{-5}$$

这时，也得到一个几乎难以测量到的极低的张量涨落功率谱

$$P_h \approx \frac{256\pi G}{3}\epsilon_\star\left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)\bigg|_{\mathbf{k}=\mathbf{a}H_\star} \approx 10^{-8}$$

给出一个 $O(\epsilon_\star^2)$ 的非常低的张量-标量谱幅度比

$$\mathtt{r} \equiv \frac{P_h}{P_{\delta\varphi}} \approx 32\epsilon_\star^2 \approx 8\frac{\gamma^4}{\mathcal{N}^4} \approx 0.0008 \tag{169}$$

相比标准暴涨的 $\mathtt{r} \sim O(\epsilon_\star)$。

总而言之，我们的标量涨落是和观测到的谱幅度是一致的，但张量涨落谱幅度虽然很低，但和目前还没有观测到张量谱的下限的结果也是一致的。如果这个预测是正确的，那么张量涨落在一段时间的测量精度内都可能无法被测量到。这依赖于未来不断改进对张量涨落观测的精度的提高，才能进一步检验这个对张量涨落近乎标度不变的预测。注意到，$\mathtt{r} - n_s$ 关系，是和具体输入参数 γ 和 $\mathcal{N}$ 无关的，从 (168) 和 (169) 得到

$$\mathtt{r} = \frac{1}{2}(1-n_s)^2$$

是处于观测的允许范围内的。

VII. 时空的统计热力学

前面的章节 (V C) 我们看到，由于时空量子涨落的 Ricci 流不再保持度量，在对量子时空做一般坐标变换的时候，不可避免的会导致量子反常，在有效作用量中出现 Shannon 熵，这个纯实数的反常项是量子时空的一个非常普遍结论。上一章我们看到这个反常导致的有效用量自动蕴含了一个有效的引力理论，这一章我们还将看到这个反常还有深刻的关于时空的统计热力学的解释 [7]。

在 (V E) 中，我们已经看到量子时空（标架场）不仅有 H 定理这样的在不可逆非平衡态统计热力学方面的类比，在时空 Ricci 流中达到局部或者整体梯度收缩 Ricci 孤立子 GSRS 构型时，即达到 Shannon 熵 N 极值时，量子时空也和平衡态统计热力学有很多方面的类比。比如 Perelman 提出，如果将 3-空间的 GSRS 构型中的 τ 参数类比作平衡态温度 $\mathcal{T}$，$\tau \sim \mathcal{T}$，那么就能从他的配分函数 Z_P (84) 出发，导出一系列热平衡态的热力学函数，这些热力学函数和他提出的一系列 Ricci 流的单调泛函有密切的联系。比如 Perelman 的 W 熵泛函和系统的 (负的) 热力学熵联系，$\mathcal{W} \sim -\mathcal{S}$，而 Perelman 的 F 泛函可以和系统（相对）内能联系，$\tilde{\mathcal{E}} \sim -\tau^2\tilde{\mathcal{F}}$，相对 Shannon 熵和自由能联系，$F \sim -\tau\tilde{N}$。不过这些类比“$\sim$”都在还相差一个量纲配平常数的程度上。而且 Perelman 对于他的配分函数 Z_P 背后的物理系综是什么，也不是清楚的。并且更基本重要的一点是，这种几何存在的 Ricci 流和单调泛函在非平衡和平衡态统计热力学方面的类比，到底是它们之间的确有深刻内在的必然联系，还是仅仅只是一种巧合，都是不清楚的。另一方面，1970 年代人们在研究弯曲时空上的量子场论特别是黑洞时就逐渐看到，弯曲时空或者引力，和热力学系统存在着广泛类比，弯曲时空上不仅有温度还有熵。但由于缺乏一个自洽的量子引力的理论，人们还无法真正理解这些时空热力学背后的微观自由度是什么，以及时空的热力学到底意味着什么等？弯曲时空的热力学和 Perelman 研究 Ricci 流时借助的热力学类比是什么关系？

为了回答这些问题，我们回顾前面的讨论，在 (IV D) 中我们已经看到时空局部标架场具有微观涨落本征模式 ψ_i，并且这些纯态的本征自由度还带有混态的系综统计密度 $e^{-\zeta_i\tau}$。其实我们已经看到，Perelman 配分函数 Z_P 其实已经通过量子时空标架场的配分函数导出（将这些混态系综统计密度 $e^{-\zeta_i\tau}$ 求和得到），因此 Perelman 配分函数背后的物理系综其实不是别的，正是量子标架场所构成的物理系综。量子标架场通过 u 密度的统计解释，标架场的量子场论其实可以看作是一个标架场的统计场理论。从这点出发我们可以看出，这个理论强烈的建议时空统计热力学背后的微观起源不是别的，正是时空标架场。从 (III C) 我们已经看到标架场粒子构成一个带标记的非全同粒子系综，u 密度描述了系综密度，在达到熵极值的时候 u 密度带有 Boltzmann-Maxwell 分布 (75) 的形式。我们将在这一章中，详细的讨论从时空标架场的统计场理论是如何能自然的得到 Perelman 的热力学类比的，以及计算出那些类比中量纲配平的常数，并且通过这个微观理论去给出过去已经发现的弯曲时空上的热力学背后的统计解释。

从谱几何的角度看，本章讨论的时空上的微观自由度，可以看作是在近似不考虑涨落对时空反作用的流极限 (梯度收缩 Ricci 孤立子)GSRS 时空的稳态固定背景上的标架场的量子涨落，这些微观自由度的统计及其热力学，就是这些标架场量子涨落的统计和热力学。其实在谱几何的框架中也提供了很多技术方法来研究这些涨落的统计，比如通过热核来计算本征态计数函数 $\mathbb{N}(\zeta) \equiv \mathbb{N}(i : \zeta_i \leq \zeta) = \sum_{\zeta_i<\zeta} 1$，这本质上定义了一种几何的熵，和量子参考系框架下的 Shannon 熵是等价的。但量子参考系理论给出比谱几何更大的框架，即这个理论告诉我们几何上量子涨落对几何的反作用是如何沿着熵单调变化的方向驱动几何流向一个 GSRS 极限构型，达到全局“热”平衡的。

A. 静态 3-空间 GSRS 构型和 3-空间标架场的热平衡态

前面我们已经看到了，当时空 M^4 是梯度收缩 Ricci 孤立子 (GSRS) 时空构型 (94) 的时候，W 熵泛函 (93) 和相对熵 (82) 达到极值。可以证明如果 4 维 GSRS 构型 M^4 的 3 维子空间 M^3 不随一个类时维度 $\mathbb{R}$ 变化，即可以写成乘积流形 (warp product) $M^4 = M^3 \times \mathbb{R}$，那么子空间 M^3 也是一个 GSRS 构型，它的 W 熵和 $\tilde{N}$ 相对熵也都达到极值，比如 S^4 和 $S^3 \times \mathbb{R}$ 都是可能的 Ricci 流终点 GSRS 构型。如果 M^4 是一个 (赝)Riemann 时空流形，那么 M^3 就是一个时间上静态的 3-空间 GSRS 构型，不随时间 $\mathbb{R}$ 变化。

具体的说，静态 3-空间的意思是 3-空间的标架场 $\mathbf{X}(x) = (X_1, X_2, X_3) \in M^3$ 对物理时间标架场 X_0 的导数是 0，即 $\frac{\delta X_i}{\delta X_0} = 0$，也即 3-空间度规 g_{ij} 对时间 X_0 的导数是 0，$\frac{\delta g_{ij}}{\delta X_0} = 0$。这样我们马上就能从 4-时空的 GSRS

方程 (94) 退化到了静态 3-空间的 GSRS 方程

$$R_{ij}-\nabla_i\nabla_j f=\frac{1}{2\tau}g_{ij},\quad (i,j=1,2,3) \tag{170}$$

此种静态 3-空间 GSRS 构型的 W 熵和 $\tilde{N}$ 相对熵都取极值。我们要证明的是，(1) 当空间标架场有虚时周期 $\mathbf{X}(\mathbf{x},x_0)=\mathbf{X}(\mathbf{x},x_0+i\beta)$ 的时候，空间标架场的 W 熵和 Shannon 熵都取极值，静态的空间标架场 $\mathbf{X}(x)$ 满足一个 GSRS 构型，(2) 并且空间标架场 $\mathbf{X}(x)$ 处于热平衡态，同时热平衡温度 $\mathcal{T}=\beta^{-1}$ 正比于 GSRS 的流参数 τ。这时标架场的映射从原来 $\mathbb{R}^4\to M^4$ 在达到熵极值的热平衡时变成 $\mathbb{R}^3\times S^1\to M^3\times\mathbb{R}$。

考虑到标架场二阶矩涨落展宽从实时/实频的形式

$$\sigma^{\mu\nu}_{\text{实频}}=\langle\delta X^\mu\delta X^\nu\rangle=\frac{1}{\lambda}g^{\mu\nu}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2}$$

变成在虚时周期/虚频 ($ip_0\to\omega$) 下的形式

$$\sigma^{\mu\nu}_{\text{虚频}}=\langle\delta X^\mu\delta X^\nu\rangle=\frac{1}{\lambda}g^{\mu\nu}\int\frac{d^3\mathbf{p}d\omega}{(2\pi)^4}\frac{1}{\mathbf{p}^2+\omega^2} \tag{171}$$

如果说实时/实频的的涨落可以通过其他正规化方法将发散吸收到其他参数中，而最后结果不一定和截断有关，那么这个虚频的二阶矩展宽一定被这个特定的虚时周期能标截断了，而这个计算不是别的，正是我们之前以欧氏底空间为出发点计算标架场的二阶矩展宽 (19)。这个虚频展宽以 $|\mathbf{p}|=\omega<k$ 为能标截断时得到

$$\sigma^{\mu\nu}_{\text{虚频}}=2\tau g^{\mu\nu}$$

这个结果使得带有非均匀展宽 ($\nabla_\rho\sigma^{\mu\nu}(X)\neq 0$) 的 u 密度 (30) 退化成了和 τ 成正比的均匀展宽 ($\nabla_\rho 2\tau g^{\mu\nu}=0$) 的 u_* 的 Boltzmann-Maxwell 形式 (75)，其中展宽只简单的用一个均匀的参数 τ 就描写了（因此和热平衡温度联系），这时系统的 Shannon 熵 N 取得极值 $N_*(u_*)$ (82)。此时作为相对熵 $\tilde{N}$ 的勒让德变换的 W 熵泛函也达到极值。

如果时空构型是静态的，$M^4=M^3\times\mathbb{R}$，那么 4-时空的 u_* 就退化成了 3-空间的形式

$$u_*(\mathbf{X})=\frac{1}{Z_*}e^{-\frac{|\mathbf{X}-\mathbf{x}|^2}{4\tau}} \tag{172}$$

W 熵泛函 (92) 和相对熵 (84) 以及 W 熵的极值条件 (93)，都从我们的 4-时空退化回了 Perelman 给出的标准 3-空间的形式

$$\mathcal{W}(g_{ij},u,\tau)=\int_{M^3}d^3\mathbf{X}u\left[\tau\left(R^{(3)}-|\boldsymbol{\nabla}f|^2\right)+f(\mathbf{X})-3\right]$$

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt}=\int_{M^3}d^3\mathbf{X}u\left[2\tau\left|R_{ij}+\nabla_i\nabla_j f(\mathbf{X})-\frac{1}{2\tau}g_{ij}\right|^2\right]\geq 0$$

$$\tilde{N}(M^3,u,\tau)=\int_{M^3}d^3\mathbf{X}u\left[f(\mathbf{X})-\frac{3}{2}\right]$$

并达到极值。于是在极值处，4-时空的 GSRS 方程也退化到 3-空间的形式 (170)。因此我们就证明了（1）只要标架场在虚时周期或者虚频下，静态 3-空间的 Shannon 熵就达到极值，空间标架场满足 3-空间 GSRS 构型方程。但是反过来却不一定正确，当 Shannon 熵 N 取极值的时候，并不一定是静态 3-GSRS 空间构型 $M^3\times\mathbb{R}$ 也可以是其他 4-时空 GSRS 构型。显然，静态 3-空间 GSRS 只是能让 Shannon 熵取极值的其中一种构型，是一种能解释成空间热稳态的构型，而其他取极值的 4-时空 GSRS 构型却不能解释成空间热稳态。

接下来我们来看，在虚时周期 β 下，虚频取分立的松原（Masubara）频率 $\omega_n = 2\pi n\beta^{-1} = 2\pi n\mathcal{T}$，$(n = 0,1,2,3...)$，那么 (171) 中的频率积分可以变成对 n 的分立求和，$\int \frac{d\omega_n}{2\pi} = \mathcal{T}\sum_n$，得到空间标架场的展宽

$$\sigma^{ij}_{\text{虚频}} = \langle \delta X^i \delta X^j \rangle = \frac{1}{\lambda} g^{ij}\mathcal{T}\sum_{n=0}^{\infty}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2 + (2\pi n\mathcal{T})^2}$$

这里的量子期待值用了一般标架场的波函数 $\langle ... \rangle = \langle \Psi_n | ... | \Psi_n \rangle$。在标架场的高斯近似下，即标架场波函数几乎只是一个在经典坐标附近展宽的高斯波函数或者相干态，那些 $n > 0$ 的内部振动激发模式被略去。只有当标架场表现得像有内部振动自由度的"多原子分子"(多粒子束缚态）的时候，那些 $n > 0$ 的波函数才变得重要。所以当标架场表现得像没有内部振动自由度而只有平动自由度的"单原子分子"的高斯近似下，我们考虑最低的高斯波函数 Ψ_0 和 $\omega_0 = 0$ 主导的松原求和（Masubara sum），

$$\sigma^{ij}_{\text{虚频}} \overset{\text{高斯}}{\approx} \langle \Psi_0 | \delta X^i \delta X^j | \Psi_0 \rangle = \frac{1}{\lambda} g^{ij}\mathcal{T}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2} = 2\tau g^{ij}, \quad \text{(无内部结构单粒子标架场)}$$

这时高斯展宽就正比于温度 $\mathcal{T}$。标架场波函数的高斯近似其实就是无内部振动自由度的单粒子近似。因此在标架场的高斯近似下，或者等价的说在无内部结构的"单原子"的标架场粒子近似下，我们可以将 τ 参数重新解释成正比于 3-空间标架场的温度。

这个空间标架场的涨落和它们处于物理时间 X_0 静态是没有矛盾的。因为虽然相对于实验室系时空坐标 x 来说空间标架场 $\mathbf{X}(x)$ 有一个微观的量子涨落，但相对于物理时间 X_0 来说，$\mathbf{X}$ 却是宏观上静态的。因为物理时间也在相对于实验室系有一个微观量子涨落。这就是我们之前讨论宇宙学常数问题的时候提到的，为什么在物理的涨落时间上看不到高斯波函数零点能的贡献。就像热平衡的气体，虽然从微观上看，每个气体分子都在不停的做热运动，但在宏观粗粒化的意义上是时间静态的。所以甚至空间标架场可以像"单原子分子"气体一样相对实验室系是可以有平均平动动能的 $\left\langle i\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_0}\right\rangle \sim \frac{3}{2}\mathcal{T}$，即这些高斯的空间标架场的中心值可以相对实验室底空间有平动，根据能均分定理这个平均动能对于 (无自旋的) 标架场来说大约是 $\frac{3}{2}\mathcal{T}$。但相对于物理时钟 X_0，空间标架场 $\mathbf{X}$ 仍然是像热平衡的气体一样宏观上是静态的 $\left\langle \frac{\delta \mathbf{X}}{\delta X_0}\right\rangle = 0$，因为只要在宏观物理时钟 X_0 的精度 $\langle \delta X_0 \rangle$ 远低于实验室系底空间无限精确的牛顿时间精度 δx_0，即 $\langle \delta X_0 \rangle \gg \delta x_0$，那么就有 $\left\langle \frac{\delta \mathbf{X}}{\delta X_0}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_0}\right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial x_0}{\partial X_0}\right\rangle \approx 0$。

我们看到在高斯近似下，就像前文我们看到的时空在 GSRS 构型下时空标架场的展宽 $\sigma^{\mu\nu}$ 和 τ 成正比一样，空间标架场的展宽 $\sigma^{ij}_{\text{虚频}}$ 和空间标架场的热平衡温度 $\mathcal{T}$ 成正比，空间坐标可以看作被热展宽了，就像时空坐标被平权的 τ 展宽一样。于是空间标架场的温度 $\mathcal{T}$ 就和空间 GSRS 构型 (170) 的 τ 参数成正比

$$\mathcal{T} = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2}}\tau = \lambda_3 \tau \tag{173}$$

其中比例系数 λ_3 和 4-时空标架场的常数 λ 成正比，还和特定空间坐标系和截断等其他因素有关。

值得指出的是，由于现在时间和空间并不平权和协变，正如温度的定义是依赖于时钟和坐标系选择的，λ_3 也是依赖于时间的定义或者说依赖于空间坐标系的规范选择的，并不像 4-时空的 λ 那样是普适和协变的。选择了适当的空间坐标系、规范或观察者，比如选择无限远的实验室惯性坐标系之后，λ_3 可以认为是固定的，这样能帮助我们简化对静态 3-空间热平衡态的数学形式的讨论。这个常数 λ_3 只是起到了联系和配平在 4-时空下定义的 τ 参数和在某个 3-空间切片下定义的非协变的温度之间的量纲，只是不同约定导致的，具体的量值并没有物理上的重要性。

正如 λ 可以解释成 4-时空的（临界）平均能量密度常数，可以在实验室系标准时空中归一化 $\lambda\int d^4x = \lambda\int dV(X)\,u = 1$ 一样，λ_3 也类似的在实验室标准 3-空间中归一化为

$$\int d^3\mathbf{x}\lambda_3 = \int d^3\mathbf{X}\lambda_3 u = 1 \tag{174}$$

可以类似的解释成在时间上平均之后得到的标准 3-空间的（非协变）能量密度。在空间坐标系做坐标变换 $\mathbf{x} \to \mathbf{X}$ 后，这个能量密度就像 u 密度一样的变换 $\lambda_3 \to \lambda_3 u$。

这样我们就证明了，(2) 在空间标架场处于热平衡态的时候，空间标架场的的温度和空间 GSRS 构型的 τ 参数成正比，比例系数可以看作是标准 3-空间的能量密度。因此我们从这个空间标架场的图像中，就能比较自然的理解为什么 Perelman 将 Ricci 流的参数 τ 和温度 $\mathcal{T}$ 联系起来之后，他的数学公式能得到这么多漂亮的统计热力学公式的类比，尽管在 Perelman 以 3-空间为基础给出的数学公式中，τ 参数和温度 $\mathcal{T}$ 的量纲也完全不相同。

另外值得指出的是，我们在前面证明过标架场的 NLSM 在欧氏和闵氏底时空下得到的结果是一样的，给出相同的纯实的 Shannon 熵。我们之前的计算只是出于在欧氏底时空下标架场的泛函积分量子化比较容易定义和计算。因此无论在欧氏还是在闵氏的实验室底时空虽然给出的热平衡 u_0 密度可能形式上不同，欧氏给出纯实的热平衡 u_* 而闵氏可能会带上一些虚数单位因子，但最后从 u_* 给出热力学函数对应的温度都是相同的。

B. 3-空间标架场系综的热力学

上一节我们证明了静态 3-空间 GSRS 构型是一个空间标架场的热平衡态，热平衡温度和 3-空间 GSRS 的 Ricci 流 τ 参数成正比。我们看到，Perelman 所用的统计热力学类比背后的物理系综其实就是空间标架场系综。这一节我们通过研究空间标架场的系综理论来研究空间标架场的热力学函数，作为后面我们研究稳态时空热力学的基础。在这一节中我们只看静态的 3-空间 GSRS 构型切片 M^3，将前面 4-时空的带“*”流极限的结果退化成 3-空间带“*”的热平衡的结果，另外一些系数也相应做替换，比如将 λ 替换成 λ_3，把 $D = 4$ 替换成 $D = 3$。

要研究空间标架场系综，我们从它们的密度出发，因为密度描写在空间体积元 $d^3\mathbf{X}$ 内找到标架场粒子的概率，包含了空间标架场完整的统计信息。比如这个空间标架场系综的配分函数就是将热平衡密度 u_0 (172) 求迹的归一化 (174) 因子

$$Z_*(\tau) = \mathrm{Tr} u_*(\mathbf{X}, \tau) = \lambda_3 \int_{M^3} d^3\mathbf{X} u_*(\mathbf{X}, \tau) = \lambda_3 \int_{M^3} d^3\mathbf{X} e^{-\frac{|\mathbf{X}-\mathbf{x}|^2}{4\tau}} = \lambda_3 (4\pi\tau)^{3/2}$$

于是我们就得到空间归一化的 3-空间 u 密度

$$u_*(\mathbf{X}, \tau) = \frac{1}{\lambda_3 (4\pi\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{X}-\mathbf{x}|^2}{4\tau}\right) \tag{175}$$

作为 4-时空热平衡密度 (75) 的 3-空间退化形式。Z_3 还以通过另一种方法来计算，即通过热平衡 Shannon 熵极值 N_* 给出的配分函数 (89) 的 3-空间退化形式来计算

$$Z_*(M^3, \tau) = e^{\lambda_3 N_*(M^3,\tau) - \frac{3}{2}} = \exp\left[-\lambda_3 \int_{M^3} d^3\mathbf{X} u_* \log u_* - \frac{3}{2}\right] = \lambda_3 (4\pi\tau)^{3/2}$$

如果考虑到热平衡温度是 $\lambda_3 \tau = \mathcal{T}$，这个配分函数其实就是标准正则系综的（标量或单原子分子）理想气体的配分函数

$$Z_*(\mathcal{T}) = V_3 \left(4\pi \lambda_3^{1/3} \mathcal{T}\right)^{3/2} \tag{176}$$

其中 V_3 是 3-空间标架场体积或理想气体的所占的空间体积，满足能量归一化 $\lambda_3 V_3 = 1$，而理想气体的质量就像是 3-空间能量密度（的开立方）$\lambda_3^{1/3}$。所以我们看到这个配分函数背后的物理系综其实就是（标量的）标架场气体的正则系综，而将标架场的相互作用吸收到能量密度系数 λ_3 里面去了之后，标架场气体又几乎是理想气体。

有了标架场理想气体正则系综的配分函数 Z_3 和温度 $\mathcal{T}=\beta^{-1}=\lambda_3\tau$ 之后，标准的统计热力学计算就能给出其他热力学函数。比如标架场气体的热平衡内能 $\langle\mathcal{E}\rangle$ 为，

$$\langle\mathcal{E}\rangle=-\frac{\partial\log Z_*}{\partial\beta}=\lambda_3^2\tau^2\frac{\partial N_*}{\partial\tau}=\lambda_3^2\tau^2\mathcal{F}_*=\frac{3}{2}\lambda_3\tau=\frac{3}{2}\mathcal{T} \tag{177}$$

其中采用了 $\mathcal{F}_*$ (86) 的 3-空间退化的形式。这个内能不是别，也正是"单原子分子"理想气体的内能，正如高斯近似下的标架场气体的图像所预期的。无内部结构的标架场的高斯近似和"单原子分子"是联系的。这正是 Perelman 将内能和 F 泛函联系起来的关系。

对配分函数继续做 β 导数就得到标架场气体的内能涨落就是正则系综理想气体的内能涨落

$$\langle\mathcal{E}^2\rangle-\langle\mathcal{E}\rangle^2=\frac{\partial^2\log Z_*}{\partial\beta^2}=\frac{3}{2}\lambda_3^2\tau^2=\frac{3}{2}\mathcal{T}^2 \tag{178}$$

观察到热平衡 $u_*(\mathbf{X})$ 密度的傅立叶变换是

$$u_*(\mathbf{K})=\int d^3\mathbf{X}u_*(\mathbf{X})e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}}=e^{-\tau\mathbf{K}^2}$$

由于 $u_*(\mathbf{X})$ 满足共轭热方程 (43) 因此实际上它的傅立叶分量的平方 $\mathbf{K}^2$ 其实就是算子 $-4\Delta+R$ 在 3-空间的本征值，或 F 泛函在 3-空间的值，作为 4-时空下本征值 (148) 在 3-空间的退化形式，因此

$$\mathbf{K}^2=\lambda_3\int d^3\mathbf{X}\left(R|\Psi_0|^2+4|\nabla\Psi_0|^2\right)=\lambda_3\mathcal{F}$$

因此 $u(\mathbf{K})$ 其实不是别的，正是标架场正则系综处于内能状态 $\mathcal{E}=\lambda_3^2\tau^2\mathcal{F}$ 的系综密度（Boltzmann 统计分布密度）的形式

$$u_*(\mathbf{K})=e^{-\lambda_3\tau\mathcal{F}}=e^{-\frac{\mathcal{E}}{\lambda_3\tau}}=e^{-\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{T}}} \tag{179}$$

标架场粒子系综之所以是 Boltzmann 分布，而不是玻色分布是因为标架场粒子 X_μ 是带标记的非全同粒子，而不是全同粒子体系。

系综的自由能也能通过配分函数 Z_* 和温度来计算出来

$$F=-\frac{1}{\beta}\log Z_*=-\lambda_3\tau\log Z_*=-\frac{3}{2}\lambda_3\tau\log(4\pi\tau) \tag{180}$$

这个自由能，在相差一个常数的程度上，也正是理想气体的标准自由能 $-\frac{3}{2}\mathcal{T}\log\mathcal{T}$。

而标架场的热平衡时的热力学熵 $\mathcal{S}$，则可以通过标架场的 Shannon 熵来给出

$$\mathcal{S}=\lambda_3N_*=-\lambda_3\int d^3\mathbf{X}u_*\log u_*=\frac{3}{2}\left[1+\log(4\pi\tau)\right] \tag{181}$$

这个热力学熵 $\mathcal{S}$，在相差一个常数的程度上，也正是在固定体积下的理想气体熵 $\frac{3}{2}(1+\log\mathcal{T})$。热力学熵 $\mathcal{S}$ 也可以通过标准热力学关系计算，即（负的）热力学熵 $\mathcal{S}$ 是 $\log Z_*$ 关于 β 的勒让德变换

$$\mathcal{S}=-\beta\frac{\partial\log Z_*}{\partial\beta}+\log Z_*=\frac{3}{2}\left[1+\log(4\pi\tau)\right] \tag{182}$$

完全类似于 W 熵泛函是相对熵 $\tilde{N}$ 关于 τ^{-1} 的勒让德变换。因此正如 Perelman 类比的那样，W 熵泛函就和负的热力学熵联系。

总而言之，我们看到一般坐标变换下，标架场配分函数 (91) 中出现额外的 Shannon 熵反常 N 项（或适当归一化的相对熵 $\tilde{N}$），这一项有深刻的统计热力学的解释，必然导致量子时空自身的非平衡和平衡态的统计热力学。我们把空间标架场的统计场论所得到的一些结果和理想气体统计热力学的相应结果总结如下表：

空间标架场在一般 Ricci 流的非流极限下	非平衡态统计热力学
相对 Shannon 熵: $\tilde{N}=-\int d^3\mathbf{X}\tilde{u}(\mathbf{X},t)\log\tilde{u}(\mathbf{X},t)$	Boltzmann H 函数: $H(t)=\int d^3\mathbf{v}\rho(\mathbf{v},t)\log\rho(\mathbf{v},t)$
Ricci 流参数: t	牛顿时间: t
单调性: $\frac{d\tilde{N}}{dt}=-\tilde{\mathcal{F}}\geq 0$	H 定理: $\frac{dH}{dt}\leq 0$
共轭热方程: $\frac{\partial u}{\partial t}=(-\Delta+R)\,u$	理想气体的 Boltzmann 方程: $\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho$

表 I: 空间标架场在一般 Ricci 流非流极限下和理想气体非平衡态的对比

空间标架场在 Ricci 流极限下的梯度收缩 Ricci 孤立子 (GSRS) 构型	理想气体的热平衡态统计热力学
配分函数: $Z_*(\tau)=\lambda_3(4\pi\tau)^{3/2}$	配分函数: $Z(\mathcal{T})=V_3(2\pi m\mathcal{T})^{3/2}$
GSRS Ricci 流参数: $\lambda_3\tau$	温度: $\mathcal{T}=\beta^{-1}$
$\lambda_3^2\tau^2\mathcal{F}_*=\frac{3}{2}\lambda_3\tau$	内能: $\langle\mathcal{E}\rangle=-\frac{\partial\log Z}{\partial\beta}=\frac{3}{2}\mathcal{T}$
几何密度: $u_*(\mathbf{K})=e^{-\tau\mathbf{K}^2}=e^{-\lambda_3\tau\mathcal{F}}$	正则系综密度 $\rho=e^{-\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{T}}}$
$-\lambda_3\tau\log Z_*=-\frac{3}{2}\lambda_3\tau\log(4\pi\tau)$	自由能: $F=-\mathcal{T}\log Z(\mathcal{T})=-\frac{3}{2}\mathcal{T}\log\mathcal{T}$
Shannon 熵: $\lambda_3 N_*=\frac{3}{2}\left[1+\log(4\pi\tau)\right]$	热力学熵: $\mathcal{S}=\frac{3}{2}\left(1+\log\mathcal{T}\right)$
W 熵泛函: $\mathcal{W}=\tau\frac{d\tilde{N}}{d\tau}+\tilde{N}$	热力学第一定律: $\mathcal{E}-\mathcal{T}\mathcal{S}=F$
单调性: $\frac{d\tilde{N}}{dt}\geq 0$	热力学第二定律: $\delta\mathcal{S}\geq 0$

表 II: 空间标架场在流极限 GSRS 构型时和理想气体热平衡时的对比

C. Schwarzschild 黑洞的温度和能量

我们上一节看到，在 Ricci 流以及 Perelman 泛函的数学公式背后，有一个空间标架场 $\mathbf{X}$ 的物理系综的图像，基于这个图像，非平衡态以及平衡态的统计热力学的类比就能比较自然的解释了。在这一节中，我们通过空间标架场这个时空微观自由度的假设来理解一些已知的时空的热力学，特别是关于 Schwarzschild 黑洞的热力学。

在空间标架场处于热平衡态时，一个重要的概念就是它处于静态的 GSRS 构型，那么当黑洞处于热平衡态时时空是否也处于静态的 GSRS 构型呢？我们先来看一个黑洞球心处于原点附近的空间区域，然后再去看原点附近之外的空间区域。我们假设物质质量 m 都只分布在黑洞球心原点附近，从无限远静止实验室坐标系 $\mathbf{x}$ 看来，物质的能量动量张量就是

$$T_{00}(\mathbf{x})=m\delta^{(3)}(\mathbf{x}),\quad T_{ij}(\mathbf{x})=0,\quad (i,j=1,2,3)$$

带入 Einstein 方程，就得到标量曲率

$$R(\mathbf{x})=-8\pi GT_{\mu}^{\mu}=8\pi Gm\delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

以及 Einstein 方程的空间分量为

$$R_{ij}(\mathbf{x})=8\pi GT_{ij}+\frac{1}{2}g_{ij}R=\frac{1}{2}8\pi Gm\delta^{(3)}(\mathbf{x})g_{ij},\quad (i,j=1,2,3) \tag{183}$$

在静态时空下，时空 Ricci 曲率的空间分量 R_{ij} 就是空间的 Ricci 曲率，所以我们观察到，Ricci 曲率的确是和空间度规成正比的 Ricci 孤立子，并且当正比例系数是正的时候，原点附近的空间区域的确就是收缩 Ricci 孤立子 (GSRS)（只是还不带“梯度”$\nabla_i\nabla_j f$）

$$R_{ij}(\mathbf{x})=\frac{1}{2\tau}g_{ij}(\mathbf{x}),\quad (\mathbf{x}\approx 0) \tag{184}$$

对比 (183) 和 (184) 就得到

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x})\tau = \lambda_3\tau = \frac{1}{8\pi Gm} \tag{185}$$

其中 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 扮演了 3-空间标架场在原点附近的能量密度 λ_3 的角色，满足归一化条件 $\int d^3\mathbf{x}\lambda_3 = 1$ (174)。因此我们就证明了静态的黑洞球心原点附近的空间区域其实正是静态的收缩 Ricci 孤立子 (GSRS)。根据 (173)，我们就能直接读出在无限远静止实验室坐标系 $\mathbf{x}$ 看到的原点附近黑洞的温度就是 Hawking 温度

$$\mathcal{T}_H = \frac{1}{8\pi Gm}$$

那么原点附近之外的空间区域是否还是 GSRS 构型呢？如果粗略看，在原点附近之外的真空空间里 $R_{ij}(\mathbf{x}) = 0$，似乎并不是 SRS 构型。但是我们下面会看到，在原点附近之外的真空如果还是 GSRS 构型，那么我们所理解的原点之外的空间真空就不再是通常经典意义上的真空了，而是充满了黑洞热辐射的热的真空，不仅要考虑 GSRS 方程的曲率部分，还需要考虑 u 密度的梯度部分的贡献了。

在经典广义相对论中我们通常会定义一个从无限远静止实验室坐标系看到的黑洞的 ADM 能量

$$m = \int d^3\mathbf{x}T_{00}(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}m\delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

但是正如同我们前面看到的空间标架场的涨落会让空间带上内能。因此从无限远静止实验室坐标系看来，黑洞所在的整个空间不仅有一个非常密集的黑洞物质源的经典能量 m，还有空间标架场量子涨落的内能 (177)

$$\langle\mathcal{E}\rangle = \frac{3}{2}\mathcal{T}_H = \frac{3}{16\pi Gm}$$

这个内能也可以看作就是 Shannon 熵反常带来的对能动张量迹反常 $-\int d^3\mathbf{x}\langle\Delta T^\mu_\mu\rangle = -\lambda_3\frac{\partial N_*}{\partial\beta} = \frac{3}{2}\mathcal{T}_H$ (74) 的贡献，因此在量子层面，无限远静止实验室坐标系看到的黑洞所在的空间的总能量是

$$m_{BH} = \int d^3\mathbf{x}\langle T_{00}(\mathbf{x})\rangle = m + \langle\mathcal{E}\rangle = m + \frac{3}{16\pi Gm} \tag{186}$$

根据量子的等效原理，在无限远静止实验室坐标系的观察者看到的引力，不仅有经典第一项的贡献，也有标架场量子涨落导致的第二项的贡献。只有在宏观经典黑洞时，$m \gg \sqrt{1/G}$，第一项经典的贡献主导 $m_{BH} \approx m$，第二项量子涨落的能量可以忽略。但是在一个比较小的微观黑洞的情形下，第二项的效应开始重要起来，导致黑洞的总能量 m_{BH} 存在一个普朗克能量 m_P 量级的下限

$$m_{BH} \geq \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} \sim O(m_P)$$

因此黑洞不能无限制的蒸发下去在空间中完全消失，正如 (VI G) 时空局部非塌缩定理所同样定性预言的那样。

另外，如果原点外的空间并不是经典意义上的真空，而是充满了热的量子涨落，从 (175) 我们看到在原点以外任何空间点都有

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = -\nabla_i\nabla_j\log u_* = \nabla_i\nabla_j f_* = \frac{1}{2\tau}g_{ij}(\mathbf{x})$$

因此虽然原点外的空间经典层面是 $R_{ij} = 0$，但现在原点外任何空间点在量子层面仍然满足 GSRS 方程，更严格的说，在原点外的空间是一个 Gaussian Soliton（度规平坦但 u 密度为高斯形式），满足 GSRS 方程

$$R_{ij}(\mathbf{x}) + \nabla_i\nabla_j f_*(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\tau}g_{ij}(\mathbf{x}), \quad (|\mathbf{x}| \neq 0) \tag{187}$$

或者从能动张量的量子期待值 (186) 也可以类似的看到，一个量子层面的 Eisntein 方程

$$\langle R_{ij}(\mathbf{x})\rangle = \frac{1}{2}\langle R\rangle g_{ij} = \frac{1}{2}8\pi G\langle T_{00}\rangle g_{ij} \approx \frac{1}{2}8\pi Gm\frac{\langle T_{00}\rangle}{m_{BH}}g_{ij} = \frac{1}{2\mathcal{T}_H}\lambda_3 g_{ij} = \frac{1}{2\tau}g_{ij}(\mathbf{x}), \quad (|\mathbf{x}| \neq 0) \tag{188}$$

相比 $\lambda_3 = \delta^{(3)}(\mathbf{x})$ (185)，我们用了修正过的 λ_3 能量密度

$$\lambda_3 = \frac{m}{m_{BH}}\delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \frac{3}{2}\frac{\mathcal{T}_H}{m_{BH}}$$

满足全空间的归一化条件

$$\int d^3\mathbf{x}\lambda_3 = \int d^3\mathbf{x}\frac{1}{m_{BH}}\left(m\delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \frac{3}{2}\mathcal{T}_H\right) = \int d^3\mathbf{x}\frac{\langle T_{00}\rangle}{m_{BH}} = 1$$

这个量子层面的 Eisntein 方程 (188) 其实不是别的，正是一个受到 u_* 梯度修正过的 GSRS 方程 (187)。这个梯度修正可以放进曲率部分 $R \to \langle R\rangle$ 或者等价的放到能动张量部分 $T_{00} \to \langle T_{00}\rangle$，让它们的期待值 $\langle ...\rangle$ 在原点之外非零，给出没有梯度的 GSRS 方程 (188)，也可以写成等价的带梯度的标准 GSRS 方程 (187)。

这样我们就证明了，从无限远静止实验室坐标系的观察者看来，不仅原点附近的空间区域 (184) 是 GSRS 构型，在量子层面，在原点之外的整个空间区域 (187) 都是 GSRS 构型，全空间都带有热平衡的 Hawking 温度。这个空间的 Hawking 温度本质上就是 Unruh 温度，因此在某种意义上，GSRS 方程是一个比 Unruh 方程更基本的方程，它给出了任何加速系（比如 Rindler 时空）和 GSRS 弯曲时空构型上的热平衡温度 $\mathcal{T} = \lambda_3\tau$。

在量子层面，由于空间中量子涨落带来的内能的贡献，全空间都满足 GSRS 方程，这也要求了对经典等效原理到量子等效原理的推广。时空引力不仅受到经典 ADM 质量的贡献，也受到了时空量子涨落内能的贡献。在一个完整的量子引力理论中，这个量子涨落能量的贡献是必须考虑的，否则就会出现如下的佯谬。比如如果我们考虑一个惯性坐标系 X，上面处处都有能动张量 $T_{\mu\nu}(X) = 0$，因此根据经典 Einstein 方程这个坐标系上处处 Ricci 张量都为 0，$R_{\mu\nu}(X) = 0$。现在如果我们做一个坐标变换把 X 系变到另外一个相对它的加速系 $\hat{X}$，由于能动张量在变换后，还是处处 $T_{\mu\nu}(\hat{X}) = 0$，因此根据 Einstein 方程还是处处 $R_{\mu\nu}(\hat{X}) = 0$。但是根据经典等效原理，这个加速系 $\hat{X}$ 上应该会感受到引力，而不应该是 $R_{\mu\nu}(\hat{X}) = 0$。显然等效原理中某种新的维度在经典 Einstein 方程和经典等效原理中被遗漏了。要解决这个佯谬的关键就是要考虑在变换到加速系 $\hat{X}$ 之后产生的 Unruh 温度及其内能所等效导致的时空弯曲和引力效应。在黑洞周围的“真空”的空间中，那些 Hawking 温度及其内能所等效导致的时空弯曲和引力导致了原点之外的空间不是经典平凡的 $R_{ij} = 0$，而是充满量子涨落的 $\langle R_{ij}\rangle = \frac{1}{2}\langle R\rangle g_{ij} = R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f \neq 0$，其中时空标架场 u 密度扮演了非平凡的角色。这些量子涨落的内能虽然看起来很低，但却正好的让空间处于全空间热平衡的 GSRS 构型。如果还没有达到这个全空间热平衡的 GSRS 构型，那么这个空间还会继续 Ricci 流演化，直到全空间流到热平衡的流极限 GSRS 构型，使得 Shannon 熵达到极值。下一节我们就来计算处于全空间热平衡态的黑洞的极值 Shannon 熵。

D. Schwarzschild 黑洞的热力学熵

从这个处于热平衡的空间标架场分布的黑洞图像，我们可以定性的看到黑洞熵背后的微观起源来自何处。因为在量子涨落的时空中，空间标架场 $\mathbf{X}$ 的展宽、模糊或不确定性由几何 u 密度完全的描写。也正是这种量子时空标架场的不确定性导致了量子反常和 Shannon 熵的微观起源。要计算黑洞熵，我们需要去计算黑洞时空背景下，描写这种几何不确定性的 u 密度的空间分布，然后由 u 密度的分布就能计算出黑洞时空背景下的熵。

原则上，由于时空几何 (g, M) 和密度 u 都在随尺度演化，我们需要同时求解方程组 (44)，但由于黑洞几何已经在流极限下了，所以我们可以简单的求解在这个流极限下的时空背景上的共轭热方程 (43) 来得到 u 密度。因为一个无限远静止实验室坐标系的观察者看到的渐近无限远的密度是平坦空间背景的标准 Boltzmann-Maxwell 型的背景 u_* (175)，给出理想气体的熵。最后我们得到热平衡相对 $\tilde{u} = u/u_*$ 密度。我们看到，在经典的黑洞度规在奇点之外的标量曲率 $R = 0$ 背景中，如果考虑时空几何的低能涨落波长远长于视界半径，等价于的说，流极限下密度几乎不再随 τ 改变，$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$，也就是黑洞度规近似是一个流的稳态，这时热稳态的共轭热方程可以

看作近似退化成 Schwarzschild 黑洞背景上的 4-时空拉普拉斯方程 (55)

$$\mathit{\Delta}\tilde{u}(X) = 0, \quad (|\mathbf{X}| \geq r_H)$$

其中 $\mathit{\Delta}$ 是 Schwarzschild 黑洞背景下的 4-时空的拉普拉斯算子。

注意到静态的密度 $\tilde{u}$ 扮演了黑洞背景上的 Klein-Gordon 方程的解的角色。这个对近似共轭热方程的近似等价于将 Klein-Gordon 场的解 $\tilde{u}$ 解释成"一次"量子化的概率密度，而不是二次量子化的场。由于 Klein-Gordon 解模式会掉入黑洞视界，并从外部观察者的视野中消失。这就好像是 Klein-Gordon 模式掉进比基态更低的负能态中。在平坦时空背景中，由于"掉进"和"穿出"视界的振幅是相同的，所以在二次量子化时，可以将"掉进"视界内的负能模式以相同的振幅，重新解释成"穿出"视界的"反粒子"的正能模式。但是在弯曲时空背景中，比如在黑洞视界表面附近，这不再成立了。"掉进"和"穿出"视界的模式的振幅不再相同，而是相差一个非幺正的因子。这导致"掉进"黑洞视界的负能模式不再能相同振幅的解释"单粒子"的反粒子正能模式，而是"多粒子"的热统计系综。这时密度 $\tilde{u}$ 描写了"掉进"视界和"穿出"视界的模式在视界外 $|\mathbf{X}| \geq r_H$ 附近叠加产生的静态的"驻波"解，被远处观察者看到。

Schwarzschild 黑洞不含物理时间，所以静态"驻波"解 $\tilde{u}$ 也不随物理时间变化，$\mathbf{X}$ 只是 3-空间坐标。由于 Schwarzschild 坐标现在只在黑洞视界半径 $r_H = 2Gm$ 外有定义，所以这个方程的解我们也只定义在视界外 $|\mathbf{X}| \geq r_H$。由于对于无限远静止观察者来说，黑洞度规在视界附近急剧的变化，因此 $\tilde{u}$ 也主要分布在视界附近。而在视界以外"空"的空间里，自然的边界条件是 $\tilde{u}$ 在无限远趋于 0，因此 $\tilde{u}$ 在视界外快速的下降为 0，u 密度在视界外和渐近无限远主要还是由平坦背景的 u_* 给出。

要求密度在视界附近的分布，我们观察到在视界附近的 Schwarzschild 度规可以用 Rindler 度规来近似，因此视界附近的共轭热方程现在写成

$$-\frac{\partial^2 \tilde{u}_{\mathbf{k}}}{\partial \rho^2} + \mathbf{k}^2 e^{2\rho} \tilde{u}_{\mathbf{k}} = \omega^2 \tilde{u}_{\mathbf{k}} \tag{189}$$

而 ρ 是视界附近的 Rindler 度规的径向坐标 $\rho = \log(r - r_H)$，r 是 Schwarzschild 度规中的径向坐标。$\mathbf{k}$ 是视界面上的 u 的动量矢量或傅立叶分量，ω 是 $\tilde{u}$ 的傅立叶模式的本征定态能量。

在 $\lim_{r\to\infty} \tilde{u}(r) = 0$ 的边界条件下，这个方程可以看作是在一个被约束在一维势井里的 Schrödinger 定态方程。势井的一边是一个无限深的近乎全反射边界 $\rho_0 = \log \epsilon_0$，其中 $\epsilon_0 \approx 0$，而另一边是一个形如

$$V(\rho) = \mathbf{k}^2 e^{2\rho}$$

的势垒。在 $\rho > -\log \mathbf{k}$ 的地方势垒就变得非常高 $V(\rho) \gg 1$，因此我们可以近似看作势垒的另一边是在 $\rho_w = -\log \mathbf{k}$ 的无限深势井。而 $\tilde{u}_{\mathbf{k}}$ 解就可以近似看作是被束缚在这个两边宽度为

$$\Delta\rho = \rho_w - \rho_0 = -\log(\epsilon_0 \mathbf{k})$$

的无限深的势井中间。因此黑洞视界的厚度就可以近似看作是 $\Delta r \sim e^{\Delta\rho} \sim \epsilon_0 \mathbf{k}$。由于现在 $u_{\mathbf{k}}$ 解就被束缚在 $\rho \in (\rho_0, \rho_w)$ 的一维无限深势井中，所以 $\tilde{u}_{\mathbf{k}}$ 解就主要分布在视界附近 $r \in (r_H, r_H + \epsilon_0 \mathbf{k})$ 的薄壳层势井中，在其他半径下快速下降为 0。另外不同的模式 $\mathbf{k}$ 可以近似的认为是以 τ 宽度给出的高斯分布。所以在这个图像中，我们不需要真的求解 (189) 就可以近似的写出一个自然的解分布，在 τ 宽度趋于 0 的时候是一个在视界面两边分布的 delta 函数，在动量分布是是一个 $\mathbf{k} = 0$ 两边分布的 delta 函数，$\tilde{u}_{\mathbf{k}}(r) \overset{\tau\to 0}{\approx} \delta(|\mathbf{k}|)\delta(r - r_H)$。而在有限 τ 时，考虑到形式解 (46) 的性质，可以在 τ 比较小的时候写成被展宽的高斯形式

$$\tilde{u}_{\mathbf{k}}(r) \approx \delta(|\mathbf{k}|) \frac{1}{\lambda_3 (4\pi\tau)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(r - r_H)^2}{4\tau}\right] = \frac{1}{\lambda_3 (4\pi|\mathbf{k}|^2\tau)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(r - r_H)^2}{4\tau}\right], \quad (r \geq r_H)$$

这个结果与物理直观是一致的，因为热方程的整体极值原理告诉我们 u"温度"最高的地方或者发生在系统的边界上，或者就是发生在 $\tau \to 0$ 的初始时刻。

于是我们有

$$\log \tilde{u}_{\mathbf{k}}(r) \stackrel{r\sim r_H}{\approx} -\frac{1}{2}\log\left(|\mathbf{k}|^2\tau\right)$$

我们先计算 $\tilde{u}_{\mathbf{k}}$ 模式的相对 Shannon 熵

$$\begin{aligned}
\lambda_3\tilde{N}(\tilde{u}_{\mathbf{k}}) &= -\lambda_3\int d^3\mathbf{X}\tilde{u}_{\mathbf{k}}\log\tilde{u}_{\mathbf{k}} \\
&= \delta(|\mathbf{k}|)\int_{r_H}^{\infty}4\pi r^2 dr\frac{1}{(4\pi\tau)^{1/2}}\exp\left[-\frac{(r-r_H)^2}{4\tau}\right]\frac{1}{2}\log\left(|\mathbf{k}|^2\tau\right) \\
&\stackrel{\tau\to 0}{=} \delta(|\mathbf{k}|)\frac{1}{4}A\log\left(|\mathbf{k}|^2\tau\right)
\end{aligned}$$

其中 $A=4\pi r_H^2$ 是黑洞视界的面积。

很自然的我们可以认为视界薄壳层势井里的动量模式，在径向 k_r 和视界面横向 $k_\perp$ 上是均匀各向同性的，即

$$|\mathbf{k}|=|k_r|=|k_\perp|$$

因此我们现在将某个 $u_{\mathbf{k}}$ 模式的相对 Shannon 熵积遍所有 $\mathbf{k}$ 模式

$$\begin{aligned}
\lambda_3\tilde{N}(\tilde{u}) &= \lambda_3\int d^3\mathbf{k}\tilde{N}(\tilde{u}_{\mathbf{k}}) \\
&= \frac{1}{4}A\int\frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2}\log\left(|k_\perp|^2\tau\right)\int dk_r\delta(k_r) \\
&= \frac{1}{4}A\int_0^{1/\epsilon}\frac{2\pi k_\perp dk_\perp}{(2\pi)^2}\log\left(|k_\perp|^2\tau\right) \\
&= \frac{1}{4}A\times\frac{1}{2\pi\tau}\left[-\frac{\tau}{2\epsilon^2}\left(1-\log\frac{\tau}{\epsilon^2}\right)\right] \\
&\approx -\frac{A}{16\pi\epsilon^2}
\end{aligned}$$

其中我们对视界面上的横向模式的动量 $k_\perp$ 积分取了一个紫外 $1/\epsilon$ 截断。最后的到结果是一个和视界面面积成正比，依赖于紫外短距离截断 ϵ^2，但弱依赖（log 依赖）于 τ 的相对 Shannon 熵。

另外一种方法就是借助 Schwarzschild 背景上的算子 $-\Delta+R$ 的本征值的计数函数 $\mathbb{N}(\zeta)\equiv\mathbb{N}(i:\zeta_i\leq\zeta)$ 与 $\tilde{u}$ 的一般关系 $\lim_{\zeta\to\infty}\mathbb{N}(\zeta)\sim\lim_{\tau\to 0}\tilde{u}$，来计算在确定温度 τ（$\tau\to 0$ 对应的是低温大质量黑洞）的情况下的微观状态数或熵，见 (56)。因为熵是计数函数的对数，即 $\mathcal{S}=\lim_{\zeta\to\infty}\log\mathbb{N}(\zeta)\sim\lim_{\tau\to 0}\log\tilde{u}$，这个关系还是回到上面的 Shannon 熵的计算。所以我们看到这个黑洞熵计数的微观状态其实就是 u 密度相应热核中的算子 $-\Delta+R$ 的本征态 ζ_i 的数目，时空几何的微观自由度就是在经典期待值附近量子涨落的微观自由度，特别是在视界附近的涨落给出了熵主要的贡献。

这熵是和一个紫外短距离截断 ϵ 相关的，要得到这个截断 ϵ，我们考虑这个相对熵极值归零的条件。我们考虑一个嵌入渐近均匀各向同性的哈勃背景中的黑洞，这个渐近的哈勃背景以 $R_0=D(D-1)H_0^2=12H_0^2$为标量曲率，而不是渐近平坦。如果是这样的话，Ricci 流的流动逐渐使得整个系统趋于热平衡。我们看到，黑洞周围的空间只是局部的热平衡，但是与整个渐近哈勃背景还没有达到热平衡，Ricci 流还会继续流下去，只有当整个系统（局部黑洞 + 渐近哈勃背景）全局热平衡的时候才会达到相对熵的极值归零的，因此我们可以估计这个渐近哈勃背景在 Ricci 流下缩成一点的尺度 t_*，在这个尺度下整个系统处于全局时空 GSRS 构型，相对熵达到极值归零。要将初始的哈勃曲率 R_0 的时空在有限的奇异尺度缩成 0，注意到 (102)，这个奇异尺度或紫外截断尺度 τ_{UV} 满足

$$\tau_{UV}=-t_{UV}=\frac{1}{64\pi^2\lambda}k_{UV}^2=\frac{D}{2R_0}$$

考虑到 $\lambda = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$，于是对应于哈勃渐近曲率 $R_0 = 12H_0^2$ 的自然的紫外截断尺度就是普朗克尺度

$$\epsilon^2 = k_{UV}^{-2} = \frac{1}{D\pi}G = \frac{1}{4\pi}G$$

值得指出的是，这个理论的自然的特征能标是宇宙临界密度 λ 而不是普朗克能标。这个理论中单独的普朗克能标或哈勃能标都没有绝对的意义。由于临界密度 λ 是普朗克能标和哈勃能标的组合，这个普朗克能标的紫外截断只是在相对于哈勃能标的时候才有意义，即将渐近哈勃曲率缩成 0（相对熵达极值归 0）的 Ricci 流奇异尺度。而如果黑洞所嵌入的渐近背景不是非 0 的哈勃曲率而是渐近平坦的，那么对应得到紫外截断能标将超越普朗克能标趋于无穷高，因为平坦的渐近背景需要无限长的流 t 才能缩成 0（渐近平坦是 Ricci 流稳定的）。

现在，如果我们将相对熵的零点定在黑洞所嵌入的渐近哈勃背景缩成 0 的最终热平衡极限，那么在这个紫外截断 $\epsilon^2 = \frac{1}{4\pi}G$ 下，黑洞的相对熵就是

$$\lambda_3 \tilde{N} = -\frac{A}{4G}$$

黑洞的热力学熵就是负的相对熵加上背景 u_* 给出的理想气体熵（相比宏观面积熵可忽略）

$$\mathcal{S} = -\lambda_3 N = -\lambda_3\left(\tilde{N} + N_*\right) \approx \frac{A}{4G}$$

以这个 Shannon 熵的结果和配分函数 $Z(M^3) = e^{\lambda_3 N - \frac{3}{2}} = e^{\lambda_3\left(\tilde{N}+N_*\right)-\frac{3}{2}}$ (89) 我们再一次得到黑洞的总内量 (186)

$$\begin{aligned}
m_{BH} &= -\frac{\partial \log Z(M^3)}{\partial \beta} \\
&= -\lambda_3\left(\frac{\partial \tilde{N}}{\partial \beta} + \frac{\partial N_*}{\partial \beta}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\beta^2}{16\pi G} + \frac{3}{2}\mathcal{T}_H \\
&= \frac{1}{8\pi G \mathcal{T}_H} + \frac{3}{2}\mathcal{T}_H \\
&= m + \frac{3}{2}\mathcal{T}_H
\end{aligned}$$

其中我们用了 (177) 以及

$$A = 4\pi r_H^2 = 4\pi(2Gm)^2 = 16\pi G^2 m^2 = \frac{\beta^2}{4\pi}$$

值得指出的是，这里黑洞熵的计算完全不同于这样一种主流观点，即认为黑洞熵由无限薄的二维视界面边界给出。在这个基于带有坐标量子涨落的密度几何的框架中，严格来说，根本没有无限薄的二维边界。黑洞附近的 u 密度主要只分布在视界面的有限薄的壳层里，由于反常主要是由 u 密度的 Shannon 熵贡献的，所以在黑洞视界面附近的 u 密度也贡献了主要的反常，即 Hawking 热辐射粒子在真空中凭空产生导致的幺正性破坏。虽然这个熵正比于视界面积，但注意到其实计算是在 3-空间中积遍所有 3-空间和 3-动量得到的，所以本质上这里的黑洞熵还是一个体积熵，而不是面积熵。换句话说，这里的二维视界面是涨落的，而不是固定的。而这里的总能量和温度则是固定的，因此在这种意义上，黑洞系统其实是一个（空间标架场统计的）正则系综，而不是一些主流观点认为的面积系综（视界面积固定）。

E. 加速坐标系中的热效应和局部谱线增宽效应

从某种意义上，物理学基础的发展史也可以看作是从惯性系过渡到一般非惯性坐标系，从而逐渐消除掉惯性系这个特殊坐标系的历史，只是这条纲领目前还没有能在量子层面完全实现，我们希望能从一般的经典坐标

系甚至过渡到一般量子化的坐标系。过渡到一般坐标系并不是平凡的问题，在经典牛顿力学中，牛顿定律只在惯性系中成立，而如果变到一个加速系或者非惯性系，形式上只需要简单的引入所谓惯性力的概念，惯性力简单的如同一个真实的外力一样也是一个矢量。到了广义相对论的框架中，我们从一般加速系或者非惯性坐标系的测地线方程可以看到，惯性力不仅和粒子运动速度有关还和一个非张量的背景时空联络有关，不再简单像一个矢量外力了，这是由于"力"的概念不再是恰当的推广了。也正是以这种方式，正确的引力定律以一种类似"惯性力"的形式自动的出现了。后来的发展我们进一步看到如果在一般非惯性系中考虑量子效应，物理上就更不平凡，比如在匀加速系中，不仅"惯性力"会出现，一些更丰富的效应也会出现，例子就是 Unruh 热效应和 Hawking 热辐射效应等。我们希望在一个量子的一般的坐标系理论中，像这些时空的热效应也应该以类似"惯性力"的形式自动出现，不仅如此，下面我们将看到在加速度中的量子效应另外的一些例子。

相对于一个坐标系 X，另有一个沿着 X_1 方向以加速度 $a = dv/dX_0$ 做匀加速运动的坐标系 $\hat{X}$。考虑到速度和时间的洛伦兹变换之后，$\hat{X}$ 系上看到的加速度就是

$$\frac{d\hat{v}}{d\hat{X}_0} = (1-\hat{v}^2)\frac{dv}{dX_0}\frac{dX_0}{d\hat{X}_0} = a\left(1-\hat{v}^2\right)^{3/2}$$

若出于简单考虑，假设 $\hat{X}_0 = 0$ 时刻的初始速度 $\hat{v}(\hat{X}_0) = 0$，积分上式就得到

$$\hat{v}(\hat{X}_0) = \frac{a\hat{X}_0}{\sqrt{1+a^2\hat{X}_0^2}} \tag{190}$$

再考虑到两个坐标系时间的关系 $d\hat{X}_0 = dX_0/\sqrt{1-\hat{v}^2}$，带入上式，出于简单性，取 $\hat{X}_0(X_0=0)=0$，两边积分就得两个相对加速的坐标系的时间之间的关系

$$\hat{X}_0(X_0) = \frac{1}{a}\sinh\left(aX_0\right) \tag{191}$$

带入 (190) 就得到 $\hat{X}$ 系的运动速度就是

$$\hat{v}(X_0) = \frac{\sinh\left(aX_0\right)}{\sqrt{1+\sinh^2\left(aX_0\right)}} = \tanh\left(aX_0\right)$$

如果 $\hat{X}$ 系一开始 $\hat{X}_0(X_0=0)=0$ 处在坐标原点 $\hat{X}_1 = 0$，那么对速度的 $\hat{X}_0$ 时间积分就得到在 X_0 时刻的 $\hat{X}$ 系的坐标为

$$\hat{X}_1(X_0) = \int_0^{\hat{X}_0}\hat{v}(X_0)d\hat{X}_0 = \int_0^{X_0}\hat{v}(X_0)\frac{d\hat{X}_0}{dX_0}dX_0 = \int_0^{X_0}\frac{\tanh\left(aX_0\right)}{\sqrt{1-\tanh^2\left(aX_0\right)}}dX_0 = \frac{1}{a}\cosh\left(aX_0\right) \tag{192}$$

(191) 和 (192) 就是匀加速 (Rindler) 系的经典双曲坐标

$$\begin{cases} \hat{X}_0(X_0) = \frac{1}{a}\sinh\left(aX_0\right) \\ \hat{X}_1(X_0) = \frac{1}{a}\cosh\left(aX_0\right) \\ \hat{X}_2 = X_2 \\ \hat{X}_3 = X_3 \end{cases} \tag{193}$$

简单的看，不失一般性，如果将坐标系看作是标准实验室系，那么在虚时下 $X_0 = ix_0$ 标架场 $\hat{X}_0$ 和 $\hat{X}_1$ 都变成虚时周期的，

$$\begin{cases} \hat{X}_0(ix_0) = \frac{1}{a}i\sin\left(ax_0\right) \\ \hat{X}_1(ix_0) = \frac{1}{a}\cos\left(ax_0\right) \end{cases}$$

虚时标架场的最低角频率 $\omega=\frac{2\pi}{\beta}$ 就是加速度 a，因此标架场的虚时周期就是 $\beta=\frac{2\pi}{a}$，所以我们就得到标架场 $\hat{X}_{0,1}$ 的温度就是 Unruh 温度 $\mathcal{T}=\frac{a}{2\pi}$。另外，我们也看到这个 Rindler 加速系 $\hat{X}$ 在时间 $\hat{X}_0$ 和运动方向 $\hat{X}_1$ 的 1+1 的维度上是一个以加速度的倒数为半径的 deSitter 时空

$$-\hat{X}_0^2+\hat{X}_1^2=\frac{1}{a^2}$$

这本质上来源与 Rindler 时空和 deSitter 时空是共形等价的，这导致很多 Rindler 时空中的性质在 deSitter 时空中都能找到对应，我们还会在后面讨论这个问题。

很显然前面把实验室系变成虚时的时候，标架场 $\hat{X}_0$ 也同时变成虚时了，$\hat{X}_0\to i\hat{\mathcal{X}}_0$，那么这个几何变成一个以加速度倒数 $1/a$ 为半径的 2 维圆形 $\hat{\mathcal{X}}_0^2+\hat{X}_1^2=\frac{1}{a^2}$，这个圆的周长就是虚时周期 $\beta=\frac{2\pi}{a}$，所以也能就得到加速系的 Unruh 温度 $\mathcal{T}=\frac{a}{2\pi}$。

Rindler 坐标系虽然是 Ricci 平坦的，但 Rindler 系上面有非平凡的黑体谱的 u 密度，使得带 u 密度的 Rindler 构型满足（极大熵的）热平衡的 GSRS 方程。我们可以证明，在量子层面，带 u 密度的 Rindler 加速系是一个 GSRS 构型，该构型的 τ 流参数正比于 Rindler 加速系的 Unruh 温度。

要得到 Rindler 加速系上的 u 密度，一种办法是求解 Rindler 背景上的共轭热方程，另一种更简单的办法是将非加速的 u 密度做一个坐标变换，变到 Rindler 加速系。考虑一个惯性系以 ω_K 为频率，沿 X_1 方向动量为 K 的标架场平面波，在惯性系的平面波函数就是 $\psi(X_0,X_1)=\exp\left[-iKX_1-i\omega_K X_0\right]$。以加速度 a 加速之后，考虑到 $K=\omega_K$，并带入 (193) 将惯性系坐标变换成加速度坐标 $(X_0,X_1)\to(\hat{X}_0,\hat{X}_1)$，得到波函数加速系中的波函数

$$\psi(X_0)=\exp\left[-i\omega_K\frac{1}{a}e^{aX_0}\right]$$

这个波函数指数上的相位也可以通过将频移后的频率 $\omega_K\to\hat{\omega}_K(X_0)=\omega_K e^{aX_0}$ 做长时间加速得到，即 $\int_{-\infty}^{X_0}\hat{\omega}_K(X_0')dX_0'=\int_{-\infty}^{X_0}\omega_K e^{aX_0'}dX_0'=\omega_K\frac{1}{a}e^{aX_0}$。于是将这个加速的平面波做无限长时间的傅里叶变换变到频谱 ω 空间我们可到

$$\psi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dX_0\exp\left[-i\omega_K\frac{1}{a}e^{aX_0}\right]e^{i\omega X_0}$$

这个傅立叶变换其实就是在计算加速系中的（整个）波函数 $\psi(X_0)$ 和惯性系中的波函数 $e^{i\omega X_0}$ 之间的交叠。令 $Y=e^{aX_0}$，则积分可以变成

$$\psi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a}\int_0^{\infty}dYY^{i\frac{\omega}{a}-1}e^{i\frac{\omega_K}{a}Y}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{i\omega}{a}\right)\left(\frac{-\omega_K}{a}\right)^{i\frac{\omega}{a}}e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}$$

计算这个波函数的模平方得到密度 $u(\omega,\omega_K)$，就得到这个加速的平面波的频谱分布变成一个带有温度的热平衡黑体密度

$$u(\omega)=|\psi(\omega)|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dX_0\exp\left[-i\omega_K\frac{1}{a}e^{\pm aX_0}\right]e^{i\omega X_0}\right|^2=\frac{1}{a\omega}\frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}}-1}$$

其黑体等效的温度就是 Unruh 温度 $\mathcal{T}=\frac{a}{2\pi}$，因此这个在加速系中的平面波的频谱密度 $u(\omega,\omega_K)$ 是一个被等效热展宽的频谱。我们看到 Unruh 效应本质上来源于加速系的多普勒展宽，Unruh 效应是一种长时间积累的多普勒效应，只是由于无限长时间的加速，频移很大，多普勒频移的原始频率 ω_K 的信息已经在黑体谱中丢失了。

将这个加速系的 u 密度带入 (193) 中的 $\hat{X}_0,\hat{X}_1$ 部分的 GSRS 方程 $R-\Delta\log u=\frac{D}{2\tau}$，其中 $D=1+1$，得到

$$-\Delta\log u(\omega)\approx\omega^2\frac{2\pi\omega}{a}=\frac{1}{\tau},\quad(\omega\gg\frac{a}{2\pi})$$

因此还是在标架场的低温高斯展宽极限下，得到 GSRS 的 τ 参数正比于 Rindler 加速系的 Unruh 温度

$$\omega^3\tau=\lambda_3\tau=\frac{a}{2\pi}=\mathcal{T}$$

其中 ω^3 扮演了能量密度 λ_3 的角色。

上面是在长时间加速下，u 密度在 Rindler 匀加速系中被展宽成了黑体谱密度，从单色谱线的纯态已经变成了一个黑体谱的混态。在一般非匀加速的情况下，如果考虑加速的时间比较短加速度比较低的情况，我们下面将看到，谱线近似还可以看作是一个纯态，加速度仅仅只是对 u 密度做了一个高斯展宽，加速度正比于相对高斯展宽。

由于非匀加速在短时间内总能看作是瞬时的匀加速 a，我们考虑在 $X_0 \sim 0$ 附近的短时间加速度频移，如果加速的时间远短于达到热平衡的特征时间 $X_0 \ll \frac{1}{a}$，则频移的频率是 $\hat{\omega}_K \approx \omega_K (1 + aX_0)$。这时被加速的平面波函数就是

$$\psi(X_0) = \exp\left[-i\hat{\omega}_K X_0\right] = \exp\left[-i\omega_K (1 + aX_0) X_0\right], \quad (aX_0 \ll 1)$$

要在短时间窗口内做这个波函数的傅立叶变换得到其短时间加速对应的频谱，可以考虑由于平面波有一个特征的时间尺度，即它的频率的倒数 $\sqrt{\sigma_{X_0}} = 1/\omega_K$，于是可以做一个时间开窗的傅立叶变换（Gabor 变换或更一般的小波变换）到短时间加速对应的频谱空间，给傅立叶变换中添加时间的高斯函数项 $\sqrt{|\omega_K|}e^{-\frac{1}{2}\omega_K^2 X_0^2}$ 在 $X_0 \sim 0$ 的时间附近开一个频率倒数的加速时间窗口，

$$\psi(\omega \sim \omega_K, X_0 \sim 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dX_0 \exp\left[-i\omega_K (1 + aX_0) X_0\right] \left(\sqrt{|\omega_K|}e^{-\frac{1}{2}\omega_K^2 X_0^2}\right) e^{i\omega X_0}$$

这个 Gabor 变换其实就是在计算加速系中（一个周期的）波函数 $\psi(X_0 \sim 0)$ 和惯性系中的波函数 $e^{i\omega X_0}$ 之间的交叠。

在 ω_K 附近，于是就得到一个以 ω_K 为中心，高斯展宽为 $\sigma_\omega = \frac{1}{2}\omega_K^2 + 2a^2$ （67）的高斯密度

$$\begin{aligned} u(\omega \sim \omega_K, X_0 \sim 0) = |\psi(\omega)|^2 &= \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + \omega_K^2}} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_K)^2}{(2a)^2 + \omega_K^2}\right] \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\sigma_\omega}} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_K)^2}{2\sigma_\omega}\right] \end{aligned}$$

这个高斯展宽 σ_ω 其实包含了惯性系中频谱自身展宽 $\frac{1}{2\sigma_{X_0}} = \frac{1}{2}\omega_K^2$ 的基础贡献（这是量子测不准原理的要求），所以在这个基础贡献之上的相对增宽 $2a^2$ 就纯粹只是由加速度带来的额外展宽，并且和频谱自身的能量无关，只反映了加速系的加速度 [10]。因此我们看到一个特定频率 ω_K 的平面波如果多普勒频移不是很大（太大了会导致完全丢失原始频谱信息变成黑体谱），在一个波周期内的短时加速度 a 的效应就是将平面波的频谱高斯增宽了，换句话说，一个在加速系中的平面波的短时频谱是被加速度增宽的，其加速度（或减速）可以通过频谱的相对高斯增宽 $\tilde{\sigma}_\omega = \sigma_\omega - \frac{1}{2\sigma_{X_0}}$ 来测量

$$|a| = \sqrt{\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_\omega}$$

即 (68)。在自然单位制下。由于自然单位变成米-千克-秒 (IS) 单位要通过 $a_{\text{自然}} = \frac{d^2x}{c^2dt^2} = \frac{1}{c^2}a_{IS}$ 分母补一个光速 c^2，另外将角频谱 ω 换成频率 f 补一个 2π，所以有

$$\frac{|a_{IS}|}{2\pi c^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_f} \tag{194}$$

由于光速 c^2 的压低，在通常实验室的加速度下对谱线的展宽的效应小到可以忽略不计，因为我们注意到加速度展宽是 $O\left(\frac{a}{c^2}\right)$ 阶效应，而比如热运动对谱线的多普勒展宽是 $O\left(\frac{v}{c}\right)$ 阶的效应，要比这个效应明显。比如一个重力加速度 $9.8m/s^2$，产生的频谱展宽大约是 $10^{-7}Hz$。另外，注意到这个公式没有普朗克常数 $\hbar$，所以这是一个纯运动学的效应，加速度从运动学的角度把频率展宽了。只有要将加速度换算到能量或者温度的时候才需要补一个普朗克常数 $\hbar$。

VIII. 可能的预言

理论的意义不仅在于对已有物理概念和已有观测事实的综合，更在于能对未来可能的观测做出适当的建议。在本文的框架中，由于出发点就是量子的等效原理，所以首先，一个最自然的预言就是不同质量的物质波函数在测地的自由下落时的应该有普适（一阶矩）频移和额外的内禀（二阶矩）展宽，除了自由下落 Schrödinger 方程给出的动力学的二阶矩展宽 $\langle \delta x^2 \rangle \propto \hbar/m$ 之外，比如频谱由加速度带来的额外普适展宽 (67)。只有这样，物质场或标架场的普适频移和展宽才描写了一个普适的量子参考系统：量子时空容器。我们在 (II) 中也讨论了一个重要的检验，即在大红移本动可以忽略的时候，宇宙背景中共动加速膨胀的氢原子拟合的精细结构常数应该和静止实验室氢原子拟合的精细结构常数相同，如果很重的质子和很轻的电子以相同的方式随共动加速膨胀宇宙背景“自由下落”的话，目前的测量基本支持这个结论，但这还需要更精细的测量。

如果说上述的预言和当前的观测基本符合的话，目前在宇宙学观测中还存在着两个关于加速度反常现象，尚不能很好的被当前的物理理论解释：一个是晚期宇宙加速膨胀或者暗能量的问题，另一个是星系或更大尺度的加速度反常或者暗物质的问题。虽然暗物质问题或者旋转加速度反常问题可以通过引入额外的物质假设来解决，但目前观测中仍然没有看到这类假设的暗物质的迹象，而暗能量或者宇宙加速膨胀的问题，更触及量子理论和引力理论之间的深层次矛盾，这些困难可能是帮助我们通向寻找量子引力这个统一基础的线索。

从本文的理论看来，暗能量和暗物质的问题，不仅向我们暗示了存在一个通向融合量子理论和广义相对论的理论框架，也向我们暗示了两种额外展宽谱线效应，作为其背后的直观统一图像。第一种就是在大尺度时空，对时空测量所依赖的谱线测量会被 Ricci 流在大尺度的粗粒化过程所展宽；第二种就是有效的加速度也会展宽谱线。谱线在宇宙大尺度受到 Ricci 流的展宽的额外贡献可能是暗能量问题的根本来源，而星系外围旋转谱线受不仅受到 Ricci 流的增宽或等效的受到旋转加速度的增宽，是暗物质问题或者星系旋转加速度反常问题的根本来源。我们目前只能通过各种间接手段在测量这些加速度（比如在宇宙加速膨胀中通过测量距离-红移关系偏离线性哈勃定律的程度，比如在星系边缘尺度通过测量 21cm 谱线的展宽来测量旋转速度和旋转加速度）。时空量子涨落带来的对谱线的额外展宽和加速度的增宽都可以看作是谱线红移的高阶效应。鉴于时空自身量子涨落带来的额外谱线展宽和加速度增宽所带来的效应和间接后果，我们尝试给出如下一些可能存在的新预言和观测的建议。

A. 宇宙大尺度时谱线红移二阶矩展宽和均方值的线性关系

除了上面在自由下落普适性上偏离 Schrödinger 方程给出预测，牛顿绝对时间和物理时钟的高阶不同，还在宇观尺度带来了另一个预测，即我们建议通过不同于测量距离-红移关系的方法去测量加速膨胀 (VI C)，而是直接去测量不同红移谱线的展宽。由于在宇宙大尺度，谱线自身的本动逐渐可以忽略，所以相应的多普勒展宽（比如热展宽等）在大尺度下都让位于时空普适的 Ricci 流展宽，而且这个理论预计红移谱线的展宽 $\langle \delta z^2 \rangle$(方差) 和红移的均方值 $\langle z \rangle^2$ 近乎成线性关系，在宇宙大尺度下，斜率趋于一个固定的 $O(1)$ 的比值 (112)

$$q_0 = -\frac{\langle \delta z^2 \rangle}{\langle z \rangle^2} \approx -0.68$$

这个普适的比值大约就是测量到的减速因子 q_0。正是这个结果在距离-红移关系在小红移展开的 $O(z^2)$ 阶修改了距离-红移关系 (111)，使得观测到的距离-红移关系在稍大的红移处（平方阶开始重要起来）开始偏离线性的哈勃定律，表现得时空在“加速”的膨胀。这个 Ricci 流导致的谱线展宽是和背景时空加速膨胀完全无法区分的。而且我们可以看到由于这个 Ricci 流增宽是各向同性的，所以对应给出的 (宇宙加速膨胀的) 有效加速度也是各向同性的。

从这个结果，我们还能得到一大类预言：不仅光度距离 $d_L(z)$，(111)，原则上任何一个观测到的关于红移的一般函数 $f(z)$，在按小红移展开之后，都应该在 $O(z^2)$ 阶受到红移二阶矩展宽的修正，

$$\begin{aligned}\langle f(z)\rangle_{量子} &= f(0)+\frac{df(0)}{dz}\langle z\rangle+\frac{1}{2}\frac{d^2f(0)}{dz^2}\left(\langle z\rangle^2+\langle\delta z^2\rangle\right)+O(z^3)\\ &= f(0)+\frac{df(0)}{dz}z+\frac{1}{2}\frac{d^2f(0)}{dz^2}\left(1-q_0\right)\langle z\rangle^2+O(z^3)\\ &= f(z)_{经典}-\frac{1}{2}q_0\frac{d^2f(0)}{dz^2}\langle z\rangle^2+O(z^3)\end{aligned}$$

即

$$\langle f(z)\rangle_{量子}-f(z)_{经典}=\delta f(z)\propto -q_0\langle z\rangle^2$$

这个和经典理论预测的偏离和红移均方值是成正比的，因此这个效应对于红移越大，越是大尺度遥远的宇观的测量就越是重要。这反映了宇宙常数或加速膨胀本质上来自量子反常。

B. 谱线的加速度增宽

(194) 给出一种加速度对频谱的效应，或者通过频谱测量加速度的效应，正是这个效应使得上面提到的 Ricci 流对频谱的展宽可以等效的看作一种宇宙背景加速度效应。在通常实验室实验中的加速度或者引力对谱线的展宽效应比较小，是 $O\left(\frac{1}{c^2}\right)$ 阶的效应，引力对谱线的额外增宽可以看作是引力红移 $(O(\frac{1}{c}))$ 的高阶效应，而且常常被其他谱线展宽效应（比如多普勒热展宽是 $O\left(\frac{1}{c}\right)$ 阶效应）掩盖，要直接检验加速度增宽效应可能是比较困难的。

由于球对称静态 deSitter 宇宙中有一个和地球观察者距离成正比的加速度 $a\sim\frac{\Lambda}{3}r$，所以在大 r 距离下有一个可观的加速度。在 FRW 坐标下，由于在低红移时，退行速度就是 $v=cz$，所以如果我们把加速度取值成时空的加速膨胀的加速度 $a_{背景}=\frac{1}{z}\frac{dz}{dt}=-q_0H_0$。这个结果换到球对称 Schwarzschild-deSitter 静态坐标就是 $a\sim\frac{dz}{dt}=-q_0H_0z=-q_0H_0^2r\sim\frac{\Lambda}{3}r$。

FRW 坐标下，利用（68），加速度 $a_{背景}=-q_0H_0$ 产生一个谱线的增宽

$$\tilde{\sigma}_{背景}=2a^2_{背景}=2q_0^2H_0^2\sim O(\Lambda)$$

进而带来谱线红移的额外增宽

$$\delta z^2=\frac{\tilde{\sigma}_{背景}}{\omega^2}=\frac{2q_0^2H_0^2}{\omega^2}$$

这个红移的额外增宽也是对于红移越大，越是遥远的宇观越大。所以我们可以将其除以红移平方，定义一个相对增宽

$$\frac{\delta z^2}{z^2}=\frac{2q_0^2H_0^2}{z^2\omega^2}=\frac{2q_0^2H_0^2}{\Delta\omega^2}$$

由于在我们的框架下有一个非零的红移展宽，因此如果频移 $\Delta\omega$ 是能够趋于 0 的，那么这个比值就会趋于非物理的无穷大。但事实上，在宇观大尺度下，由于谱线周期最大被红移到有限的宇宙年龄的哈勃尺度极限，频谱其实应该有一个非零的频移下限 $\Delta\omega\searrow H_0$，于是得到一个 $O(1)$ 的红移相对增宽

$$\frac{\delta z^2}{z^2}\nearrow 2q_0^2\sim 0.82$$

这个结果和 (112) 在一定的误差范围能基本是一致的，表明 Ricci 流的谱线展宽效应等效于引力和加速度效应，而且加速度增宽只和加速度有关，和谱线的能量无关，是普适的，这也是量子等效原理的表现。

加速度增宽谱线的概念不仅能应用于理解时空的加速膨胀，也是理解局部星系加速度反常方便的概念。

C. 孤立的超暗球状矮星系的总加速度下限和星系随空间的共动膨胀

由于这个背景展宽并不改变谱线的中心值，所以这背景展宽并不会影响到星系中卫星旋转速度（谱线中心值同时蓝移和红移）产生的多普勒展宽，仅仅只是修正距离-红移关系的 $O(z^2)$ 阶。背景展宽虽然不直接影响其旋转速度中心值移动带来的多普勒展宽，但影响地球观察者看到的旋转加速度增宽 $\tilde{\sigma}_{加速度} \sim a_D^2$ 造成加速度偏离。加速度谱线增宽 $\tilde{\sigma}_{加速度}$ 和 Ricci 流带来的频谱增宽 $\tilde{\sigma}_{背景} \sim \Lambda$ 共同贡献谱线额外的增宽，两个效应都贡献额外的总加速度。

在星系外围，其卫星本动速度 v 逐渐减小的时候，其加速度导致的增宽 $\tilde{\sigma}_{加速度}$ 也逐渐减小，Ricci 流展宽的部分 $\tilde{\sigma}_{背景}$ 逐渐开始主导谱线的展宽，导致加速度展宽在和背景加速度或者对应的背景展宽可以比拟的时候，测量到的加速度开始偏离牛顿引力定律的预测，这个转变趋势的确和观测和唯像的 MOND 给出的结果是接近的，见 (图 2)。由于时空渐近有一个 Ricci 流的背景展宽 $\tilde{\sigma}_{背景}$ 的贡献，所以使得谱线展宽在大尺度本动相对很小的时候，渐近的趋于一个宇宙常数量级的背景展宽下限。

星系外围卫星绕转的问题，作为一个受到宇宙常数和加速膨胀综合影响的牛顿引力系统，不太严格的，就类似一个在特定外电场中原子最外层价电子的效应，外电场能量抬高了原子的能级，就好像宇宙常数和膨胀动能抬高了星系绕转的总加速度和转动速度。在原子的这种效应中其实很难明显的区分能级中哪部分能量来自电子的动能，哪部分来自外场能量，哪部分来自电势能，只能通过光谱测量出总的被抬高能级。星系的问题也类似，如果无法清楚的区分旋转动能、膨胀动能和引力势能的贡献，只能通过光谱看到一个被抬高了的总加速度下限。特别对于一些没有明显自身整体转动的盘状结构 (或外围中性氢) 和不是旋转支撑主导的孤立非漩涡星系，其卫星的旋转加速度不容易和星系自身膨胀加速度区分开来，测量到的只能是一个笼统的总加速度，当旋转速度很低的时候表现出一个有效加速度下限 $\tilde{\sigma}_{背景} \sim O(\Lambda)$。一个经过重整之后的结果大致是

$$\sqrt{\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^{re}_{背景}} \approx a_{min} \approx \varUpsilon^{3/2}\sqrt{\Lambda} \approx O(10^{-11} m/s^2)$$

这个效应完全是时空量子涨落导致谱线有一个下限本底展宽带来的。预计会在那些加速度或等效的谱线展宽相比背景加速度或背景展宽同量级，或者更低的时候开始重要起来，即那些重子物质密度相比宇宙临界密度可以比拟的超暗星系，或者在星系外围重子物质密度足够低，引力和加速度足够低的情况发生（假设如果不存在暗物质的贡献）。这个可能存在的有效加速度下限目前有一些迹象，比如在超暗的球状矮星系 (ultrafaint dwarf Spheroidals (ultrafaint dSphs)) 的数据点中 (图 2)，但目前尚不确定这是唯一的解释，比如一些学者认为这些早期的星系可能还尚未达到位力平衡等。

值得指出的是，这个下限的含义是在旋转加速度非常小的情况下，星系自身还有一个随时空背景共动膨胀的背景加速度。因此这个加速度下限存在与否，只是你有没有扣除背景加速度的问题。对于一些没有明显整体旋转的非漩涡星系，比如球状矮星系，旋转加速度不容易和背景膨胀加速度区分开来，这时很可能会看到这个包含背景膨胀的加速度下限。如果星系自身是在明显整体旋转的漩涡星系，其旋转加速度比较容易通过单独的多普勒展宽测量出来，那么总加速度中要将这个自身膨胀加速度扣除，那么旋转加速度就没有这个下限。我们看到，由于宇宙膨胀的加速度比较小，所以加速膨胀的效应只有在半径比较大的时候才比较明显，成为星系径向加速度偏离的贡献之一。而且星系的加速膨胀效应还是必须的，才能更好的拟合测量到的加速度偏离数据点。这也带来了另外一个可能的预言，即由于星系半径随尺度因子 $\mathbf{a} = (1+z)^{-1}$ 共动膨胀，因此我们看到更遥远的星系对应更早期红移更大的星系，他们的发光半径应该更小，即星系特征半径随红移的变化为

$$r_{星系} \sim (1+z)^{-1}$$

这符合目前的一些观测。虽然目前主流的观点是认为，这个关系主要来自星系间介质的气体和恒星的吸积以及与其他星系的合并导致。而这里的解释很简单，就是来自星系随宇宙背景尺度因子的膨胀。

另外由于我们将加速度反常看作是局部牛顿引力系统连续过渡到 FRW 宇宙膨胀背景引力带来的，因此这只适用于直接和 FRW 宇宙膨胀背景过渡的“孤立”星系，如果处在一个由很多星系组成的星系团环境，那么其中的单个星系就可能不是直接和宇宙膨胀背景连接，而是周围被其他星系所包围，那么也会造成和内插函数行为或这个下限的偏离。

IX. 结论

“由于人类面临大量的问题，21 世纪物理学很可能被各种应用问题主导。这些当然非常非常重要，但是与 20 世纪的主旋律相比较，它将缺乏诗意和哲学的品质。如果有一个领域发生重大的基础性革命，我相信那将是天文物理学领域。诸如暗物质、暗能量的迷惑将被美丽的新概念所替代。”

———杨振宁 2017 年《20 世纪理论物理学的三个主旋律：量子化、对称性、相位因子》

在量子等效原理的基础上，量子时空仍然是几何化的。要自洽的考虑一个不需要借助嵌入到绝对外部坐标来定义的（即内蕴的、相对的）量子理论，我们需要考虑量子的标架场对时空的度量，给出一个内蕴定义的量子涨落的时空几何框架，我们建议将由经典量尺和时钟 (线元) 所度量的 (赝) 黎曼几何时空 (M,g) 推广到了由量子时空参考系 (线元或热核) 所度量的带有 Ricci 流的和局部密度 u 的密度黎曼几何 (M,g,u)。这种几何在 u 密度的基本解回到无二阶矩的 delta 函数，度量二次型 g 不受到坐标二阶矩涨落的修正的时候，坐标的平均值（一阶矩）的描写回到经典黎曼几何 (M,g)。而 u 密度基本解的非平凡二阶矩（甚至更高阶矩）描写了时空几何 (M,g,u) 局部的量子涨落和坐标的模糊性，描写了时空最低阶（二阶矩）的量子本性。诸如时空的加速膨胀、加速度反常、一般坐标变换的量子反常、时空的统计熵等概念都源于这种时空的量子二阶矩涨落而产生的效应，是本文最主要要阐述的问题。

时空 (M,g,u) 局部的 u 密度作为共轭热方程 (43) 的解，不仅像通常谱几何那样反映了固定 Riemann 时空背景上的类-拉普拉斯算子的本征涨落，还产生了对背后时空背景的反作用，即时空几何会被 Ricci-DeTurck 流 (39) 逐渐不可逆的重整化或粗粒化，于是完整的决定密度黎曼几何 $(M,g(t),u(\tau))$ 中的度规 g 和密度 u 的方程是一个耦合的方程组 (44)，这是本文最重要的数学方程和结论之一。Perelman 发现了这组方程组的变分结构，即方程组可以作为一些单调熵泛函的梯度流，为分析这个耦合系统的行为提供了有利的工具。要一般性的求解这组耦合方程组是很困难的，幸好大部分和观测对应的时空几何常常可看作，或者近似看作是这个流极限下的梯度收缩 Ricci 孤立子 (GSRS) 构型，这为我们对这些时空构型做一些固定背景的近似计算 u 密度带来了可能。例如对于宇宙晚期的加速膨胀问题，其实就是在时空平权均匀各向同性的 Ricci 流极限 GSRS 构型 $\mathbb{B}^4$ 上计算随 Ricci 流尺度 τ 变化的 $u(\tau)$ 密度。而极早期宇宙的问题，其实是随物理时间 $\mathbb{R}$ 演化的均匀各向同性空间 $\mathbb{B}^3$ 的时空 GSRS 极限构型 $\mathbb{B}^3\times\mathbb{R}$ 上计算随物理时间 $T\in\mathbb{R}$ 演化的 $u(T,\tau)$ 密度。在黑洞问题上，则是在物理时间静态的球对称空间 $\mathbb{B}^3$ 的 GSRS 构型上计算随空间半径 $r\in\mathbb{B}^3$ 分布的 $u(r,\tau)$ 密度。

我们为这个密度几何重整化的框架提供了一个物理的基础，即在量子等效原理下，时空几何 (M,g,u) 可以通过在 $d=4-\epsilon$ 的实验室系上制备的至少 $D=4$ 个标架场 X_μ 来度量（一种 $d=4-\epsilon$ 的非线性 σ-模型）。这个标架场的量子物理模型特别适合于在数学上自洽定义的给出时空的量子二阶矩涨落及其带来的 Ricci 流重整化过程。这个理论在极限下回到三个方面的现有理论。(i) 一方面，这个相对于物质的量子标架系统的量子物理系统，在半经典近似下，回到了固定弯曲背景上的量子理论（III D）。(ii) 在考虑了标架场量子涨落的高斯近似下，Riemann 度量二次型被标架场量子涨落带来粗粒化的坐标修正了，这个度量的修正和 Ricci 曲率成正比，这便产生了量子时空的 Ricci 流。这样一个带有 Ricci 流和密度的几何 (M,g,u) 描写了一个带有量子 (至少) 二阶矩涨落的时空。因此在另一方面，这个理论也自动包含了有效的 Einstein 引力理论和对它的量子修正（VI D）。

(iii) 再就是，这种 (至少) 二阶矩涨落的量子不确定性也自动包含了时空的统计热力学（VII B)。

在 Ricci 流过程，如果没有遇到几何局部的奇异性，时空几何 (M, g, u) 的拓扑结构 M 不发生改变，但几何上的距离二次型 g 会被量子二阶矩涨落，也就是被 Ricci 流改变，这使得几何在做一般坐标变换的时候 Lorentz 对称性会在量子层面破坏，导致微分同胚反常。反常需要在刚性的、经典的、无限精确的实验室坐标系中被抵消，抵消项给出了宇宙常数的一种计算。在这个框架下，由于时空几何的体积是随 Ricci 流变化的，宇宙常数可以等价的看作是对这种体积变化的响应（response）。而宇宙常数的引入对引力理论本身也产生诸多后果，比如对星系尺度等局部引力加速度的修正。

时空几何局部在量子涨落或 Ricci 流作用下是体积是收缩的还是膨胀的稳定性问题，取决于局部 F 泛函的正负号。时空的局部的 F 泛函取值如果是正的，那么是可能发生局部不稳定而收缩到非常小的体积的。局部时空的不稳定性是极早期宇宙发生暴涨的主要原因。而时空几何的局部或整体是否会由于量子涨落而完全塌缩成没有结构的点，丢失掉所有原来的几何信息，这取决于几何的 W 熵泛函的有限性。时空几何的"局部非塌缩定理"保证了时空局部结构稳定性，时空并不会在量子涨落中完全塌缩成无结构的点。这也可以看作是经典广义相对论正质量猜想在量子层面的保证。也正是由于局部非塌缩，使得我们总可以在极早期宇宙某个曲率非常大的空间邻域内找到一个规则光滑的几何背景，称为典型邻域，在这个规则背景上研究通常的原初量子涨落。

在整个时空被 Ricci 流粗粒化过程中，尽管几何可能会演化出局部的曲率非常大的区域，但由密度 u 和 Riemann 度量 g 所构成的一些泛函，比如 Perelman 的 W 熵和 Shannon 熵 $\tilde{N}$ 一直单调的变化（时空的 H 定理），直到几何逐渐最终变成熵最大的 GSRS 构型。这种带有最大熵的时空几何构型上，如果存在类时的坐标，那么在类时的空间切片上的空间或者上面的标架场就是达到热平衡的，其温度正比于 GSRS 构型的 τ 参数，标架场的 u 密度反映了标架粒子在热平衡下的系综统计密度，W 泛函可以解释成标架场系综的热力学熵，而 Shannon 熵 $\tilde{N}$ 可以解释成"标架场稀薄气体"的类 Boltzmann 的 H 泛函。这个量子标架场理论在热平衡时有较好的热力学含义，提供了一个解释时空几何和引力背后的微观自由度的统计理论和热力学理论。时空所有的统计不确定性或者熵都来自 u 密度所描写的时空涨落和量子不确定性。经典的 Schwarzschild 黑洞奇点附近的几何就是一个 GSRS 构型，可以看作是一个热平衡的构型，文章中以此为例子，该框架的计算给出了和 Hawking 温度和熵相符的结果。

与时空 Ricci 流耦合的 u 密度的方法，更一般的，也可以看作是通过非线性 σ-模型描写的标架场或者（与时空 Ricci 流耦合的）共轭热方程的热核方法（IV D)。它提供了一种基于热核的量子时空几何的理论框架：首先量子等效原理使得标架场的热核度量了普适的时空几何（V A)，其次热核的积分变换提供了一般量子坐标变换的框架（V B)，从而给出了微分同胚反常（V C）和有效引力的出现（VI)，热核也提供了计算标架场统计和一般时空几何熵（VII）的基本框架。

本文讨论了这一新的时空几何框架在内禀的二阶矩涨落或展宽的影响下带来的可能后果，特别讨论了这些时空的二阶效应，比如距离二次型、曲率和加速度等相关的二阶修正效应，对宇宙学一系列加速度反常问题（暗能量和暗物质等问题）提供了一个可能的统一的图像。这些加速度和经典理论预言的偏离都可以看作是时空额外二阶矩量子涨落展宽 (时空坐标或谱线) 带来的。时空二阶矩涨落带来的等效加速膨胀或宇宙常数有效的修正了局部牛顿引力定律，特别在局部引力比较弱的时候开始出现明显的表现出偏离牛顿引力的趋势。在引力和加速度更低的大尺度区域，星系自身跟随背景时空的等效加速膨胀的效应也开始进一步贡献星系或星系团的加速度反常。归根到底，时空度规在大尺度下由 Ricci 流以及 GSRS 流极限方程所决定，而非宇宙中的物质来决定，只在小尺度下退化成由物质决定时空度规的 Einstein 方程，因此大尺度的 Ricci 流方程和小尺度 Einstein 方程之间的不匹配是造成宇宙中物质和能量缺失的原因。

我们把本文的尝试看作是将 Gauss-Riemann-Einstein 的坐标无关和内蕴几何的精神和纲领做的一种推广，以量子参考系或量子标架场为基础在物理上将其贯彻到量子的层面，以实现一个自洽的综合了量子原理和一般时空相对性原理的统一几何框架。但我们不想让读者感到好像已经沿着这个纲领的路线，所有基本的问题以及

当前基础物理学的困难都已经解决了，相反，我们觉要实现这个宏伟的纲领并不是容易的事情，统合相对论和量子理论这个难题在半个多世纪以来动员了全世界数以百计的科学家穷其毕生之力，或许一些看到整幅图像的最重要的拼图还尚未出现，这或许只有将来回看历史的人才能了解。我们也不能肯定说当前的工作已经牢靠的站得住并是一般正确的了，我们只能说本文提供了到目前为止我们个人关于这个问题的一些看法和心得，这只是一项仍然在进行中的工作报告，其中还有很多尚未解决的问题，还有很多工作尚待完成，在很多方面也还有待实验的验证。我们不妨将着一些问题罗列如下：量子层面等效原理的推广和确立，还需要更多实验的检验。这个量子参考系标架场的实验室底空间维数在 $2 < d < 4$ 的严格的量子可重整性只有数值计算的证据，还没有严格的数学证明。Ricci 流和 Perelman 的单调泛函对三维以上维数，以及带有不定度量的 (赝) 黎曼几何的有效性和推广的问题仍是数学上尚未完全解决的困难问题，但好在本文很多计算基于的流极限的 GSRS 方程 (94) 对任意维数，并同时对正定度量的黎曼几何成立也对不定度量的赝黎曼几何都成立。本文所考虑的 Ricci 流只涉及到了时空的二阶矩涨落，即高斯近似，在这个框架中时空局部是会导致奇点的，在临近时空奇点的时候，高阶矩的涨落变得越来越重要了，因此本文完全没有触及到时空奇点的问题，虽然耦合的方程组 (44) 在一定程度上弱化了单独 Ricci 流的局部奇异性（局部非塌缩定理），但并没有完全消除时空局部奇异性的发生。在高斯近似下，Ricci 流方程的收敛性的问题就近似等同于标架场可重整性和紫外完备性的问题，目前标准的方法是通过 Ricci 流 + 奇点手术的方法来跨越这种数学的奇异性，但还不涉及到量子涨落是否可以避免时空的奇异性这个问题。另外目前基于这个框架对星系加速度反常的解释仍然还有待更进一步的发展，等等。

但如果我们稍微放松一些数学如此困难的严格性，仅仅通过考虑时空的二阶矩量子涨落和 Ricci 流，就已经说明了诸多过去没有联系的事实，从宇宙加速膨胀到星系加速度反常到几何熵的来源到极早期奇点附近的暴涨，那么或许这个想法还是值得花时间考虑的，或许这个框架还是击中了理解某些问题的某些核心要素的，或许是能帮助我们看到整幅完整图像的一块有用拼图。就算这个想法将来只是淹没在了茫茫文献的大海中，如果她的确是一块有用的拼图，我相信将来她也会被重新发明出来。从这个意义上来说，人类对自然结构的认识会有所涨落，但终究会收敛到一个相对更为正确的认识上去。在把相对论和量子理论综合起来的基本问题上，在时空的量子本性这个基本问题上，还有相当多的争论，以及相当多哲学的、技术上的路线都在并行的被相当多的研究者展开，最后只能是通过不断发展的技术手段对它们进行的实验检验。

本文是对如下一些已发表的论文的中文综述，因此并没有列出更多更详尽参考文献，本文也没有提供足够的篇幅来介绍关于非线性 σ-模型、Ricci 流、Perelman 熵及其密度黎曼几何和谱几何等方面更详尽背景，这些背景可以参见参考文献。

(III B) 中我们通过路径积分的方法，考虑了位置算符 X，不是相对于外部绝对参数 τ，而是相对于时钟位置算符 T 的相对演化。这个附录中，我们将以纠缠量子态构成的量子态空间 $\mathscr{H}_X \otimes \mathscr{H}_T$ 及其子空间的纤维丛和张量几何为基础，更详细的讨论被测系统量子态 $|X_i\rangle \in \mathscr{H}_X$ 和测量仪器 $|T_a\rangle \in \mathscr{H}_T$ 之间的相对演化和"相对关系"，这是一种将被测量子系统和量子测量仪器以更对称的形式处理的内蕴几何的观点。

为了更好的体现出非平凡纤维丛和黎曼几何之间的相似性，我们在该附录中都将采用离散的基矢量的版本来代替 (III B) 中连续的基矢量版本，即用 $|X_i\rangle$ 来取代 (III B) 中的 $|X(\tau)\rangle$。类似的，$|T_a\rangle$ 是量子时钟指针坐标算符的基矢量（(III B) 中的 $|T(\tau)\rangle$ 的离散的版本）。

我们假设在被测系统和量子仪器之间的校准过程制备了一个纠缠态 (1)

$$|X,T\rangle = \sum_i^N C_i |X_i\rangle |T_i\rangle, \quad (C_i \in \mathbb{C}) \tag{195}$$

这个量子态是线性和平坦的量子态空间 $\mathscr{H}_X \otimes \mathscr{H}_T$ 中的矢量。为了确保两个子空间的量子态是一一对应的，全量子态空间的维数取两个子空间中最低的维数 N。这个纠缠态在这个局部 (特定 i) 直积基矢量 $|X_i\rangle|T_i\rangle$ 的表示下，给出的联合振幅 C_i（一般是一个复数），并满足归一化条件 $\sum_i^N |C_i|^2 = 1$。

值得指出的是，这个制备的纠缠态 (195) 并不是一个标准的施密特(Schmidt)分解的纠缠态，C_i 不是 Schmidt 系数，局部的子空间基矢量并不一定是正交归一的（Schmidt 分解则是要在全量子态空间的局部选取适当的坐标系 $|X_i\rangle|T_i\rangle$，使得纠缠态在这个坐标系上的展开系数 C_i 实数化，并使得局部基矢量是正交归一的）。

由于量子态空间 $\mathscr{H}_X \otimes \mathscr{H}_T$ 的单个子空间 $\mathscr{H}_X$ 或 $\mathscr{H}_T$ 可能局部不再平坦了，我们总可以考虑纠缠态在局部的 $\mathscr{H}_X$ 子空间的基矢量 $|X_j\rangle$ 相对于在局部的 $\mathscr{H}_T$ 子空间局部的量子态

$$|T\rangle = \sum_{a=1}^N t^a |T_a\rangle, \quad (t^a \in \mathbb{C}) \tag{196}$$

的变化，其中 $|T_a\rangle$ 是纠缠态在局部 $\mathscr{H}_T$ 子空间的（非正交）基矢量，t^a 是相应的归一化振幅。现在我们要考虑的就是*局部的 $\mathscr{H}_X$ 子空间的基矢量 $|X_j\rangle$ 随着与之纠缠的局部子空间 $\mathscr{H}_T$ 上的复坐标 t^a 的变化或演化了*。

这个纠缠态是由局部子系统粘合而成的一个非平凡的纤维丛的结构，尽管全量子态空间 $\mathscr{H}_X \otimes \mathscr{H}_T$ 是平坦的线性空间，但其局部子空间 $\mathscr{H}_X$ 并不是平坦的，我们取 $\mathscr{H}_X$ 和 $\mathscr{H}_T$ 纠缠一一对应的那部分态空间，因此维数也是 N。其局部度规可以通过基矢量 $|X_i\rangle$ 内积来给出

$$h_{\bar{i}j} = \langle X_i|X_j\rangle \neq \delta_{ij}, \quad h_{\bar{j}i} = \langle X_j|X_i\rangle = \langle X_i|X_j\rangle^* = h^*_{\bar{i}j} = h_{i\bar{j}}$$

下指标 i 的 bar 表示内积中的下指标的左矢是对下指标的右矢做了复共轭（由于物理的度规是厄米的 $h_{\bar{i}j} = h^*_{\bar{i}j} = h_{j\bar{i}}$，这个复度规的指标交换是对称的)。类似的，上指标 j 的 bar 表示的是内积中的上指标右矢是对下指标右矢做了复共轭，

$$h^{i\bar{j}} = \langle X^i|X^j\rangle, \quad h^{j\bar{i}} = \langle X^j|X^i\rangle = \langle X^i|X^j\rangle^* = h^{i\bar{j}*} = h^{\bar{i}j}$$

由于度规的厄米性，如果两个不同指标都不带 bar 或两个不同指标都带 bar 的度规分量都为 0，考虑和局部基矢量 $|X_i\rangle$ 局部对偶的基矢量现在是 $\langle X^j|$（一个上指标一个下指标），他们满足正交性归一性

$$\langle X^j|X_i\rangle = \delta^j_i, \quad \langle X_j|X^i\rangle = \delta^{\bar{i}}_{\bar{j}} \equiv \delta^i_j$$

现在 $|X_i\rangle$ 是纠缠态在被测量的粒子局部 $\mathscr{H}_X$ 子空间中的基矢量，$i = 1, 2, ..., N$。因此被测量的粒子的量子态 $|X\rangle$ 也可以通过这套局部的基矢量来展开，

$$|X\rangle = \sum_{i=1}^N x^i |X_i\rangle, \quad (x^i \in \mathbb{C})$$

类似的，x^i 是归一化的复坐标，$x^i \in \mathscr{H}_X$。

类似的，$\mathscr{H}_T$ 子空间的非正交基矢量给出度规

$$s_{\bar{a}b} = \langle T_a|T_b\rangle \neq \delta_{ab}, \quad s_{\bar{b}a} = \langle T_b|T_a\rangle = \langle T_a|T_b\rangle^* = s^*_{\bar{a}b} = s_{a\bar{b}}$$

以及

$$s^{ab} \equiv s^{a\bar{b}} = \langle T^a|T^b\rangle, \quad s^{b\bar{a}} = \langle T^b|T^a\rangle = \langle T^a|T^b\rangle^* = s^{a\bar{b}*} = s^{\bar{a}b}$$

$|T_a\rangle$ 和对局部偶基矢量是 $\langle T^b|$（(III B) 中的 $|\bar{T}(\tau)\rangle$ 的离散版本），满足

$$\langle T^b|T_a\rangle = \delta^b_a, \quad \langle T_b|T^a\rangle = \delta^{\bar{a}}_{\bar{b}}$$

很显然，由于 $|T_a\rangle$ 现在是子空间 $\mathscr{H}_X$ 上的纤维，因此两个子空间的基矢量是局部正交的

$$\langle T_a|X_i\rangle = 0$$

我们可以借助 $\mathscr{H}_X$ 子空间的局部度规 $h_{\bar{i}j}$ 来定义 $\mathscr{H}_X$ 上的局部标准的 Levi-Civita 联络和内蕴 Ricci 曲率，复坐标下非零的分量只有

$$\Gamma^k_{ij} = h^{k\bar{l}}\frac{\partial h_{j\bar{l}}}{\partial x^i}, \quad \Gamma^{\bar{k}}_{\bar{i}\bar{j}} = h^{\bar{k}l}\frac{\partial h_{\bar{j}l}}{\partial x^{i*}}, \quad R_{\bar{i}j} = -\frac{\partial \Gamma^{\bar{k}}_{\bar{i}\bar{k}}}{\partial x^j} = -\frac{\partial}{\partial x^j}\left(h^{\bar{k}l}\frac{\partial h_{\bar{k}l}}{\partial x^{i*}}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^{i*}\partial x^j}\left(\ln\det h_{\bar{i}j}\right)$$

我们下面都默认按照张量求和的 Einstein 约定，将相同的上下指标求和并省略掉求和号。

当 $|T_a\rangle$ 是类时的，那么 $\mathscr{H}_X$ 的外曲率

$$K_{\bar{i}j} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{\bar{i}j}}{\partial t^a}|T^a\rangle$$

描写了子空间 $\mathscr{H}_X$ 的度规 $h_{\bar{i}j}$ 相对于与之纠缠的另一个子空间 $\mathscr{H}_T$ 的态矢量 (196) 的变化。并且我们还可以定义标量外曲率

$$K = h^{\bar{i}j}K_{\bar{i}j} = -\frac{1}{2}h^{\bar{i}j}\frac{\partial h_{\bar{i}j}}{\partial t^a}|T^a\rangle, \quad K_a = -\frac{1}{2}h^{\bar{i}j}\frac{\partial h_{\bar{i}j}}{\partial t^a} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t^a}\left(\ln\det h_{\bar{i}j}\right)$$

对外曲率 K_{ij} 的导数可以表示成对度规 $h_{\bar{i}j}$ 的二阶导数，即 $\frac{\partial K_{\bar{i}j}}{\partial t^*_b}\langle T_b| = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{\bar{i}j}}{\partial t^a \partial t^*_b}\langle T_b|T^a\rangle = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{\bar{i}j}}{\partial t^2}$。

由于纠缠态 $|X,T\rangle$ 作为标准的量子力学态，其所在的整个复射影空间 $\mathscr{H}_X\otimes\mathscr{H}_T$ 是 Ricci 平坦的，满足复射影空间的 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程

$$R_{\bar{I}J}(q_{\bar{I}J}) = 0$$

其中 $q_{\bar{I}J} = h_{\bar{I}J} + s_{\bar{I}J}$ 是全空间的度规在 $\mathscr{H}_X\otimes\mathscr{H}_T$ 子空间的分解。这个 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程做 $\mathscr{H}_X\otimes\mathscr{H}_T$ 子空间的分解的形式，除了包含了 $\frac{1}{2}N(3N+1)$ 个约束方程外，我们现在关心的是其包含的 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 个子空间基矢量之间的相对演化方程，确切的说是 $\mathscr{H}_X$ 子空间的内蕴曲率 R_{ij} 和相对于外部 $\mathscr{H}_T$ 空间如何弯曲的外曲率 K_{ij} 之间满足的方程

$$\frac{\partial K_{\bar{i}j}}{\partial t^*_a}\langle T_a| = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{\bar{i}j}}{\partial t^2} = R_{\bar{i}j} + KK_{\bar{i}j} - 2h^{k\bar{l}}K_{\bar{i}k}K_{\bar{l}j} \tag{197}$$

这个方程也可以看作是复空间推广的 Gauss-Codazzi 方程。方程两边的几何量（内曲率和外曲率）都是协变的，不再参考任何外部绝对参数。因此这个方程是一般协变（general covariant）的，并且是内蕴的描写了纠缠态的子空间 $\mathscr{H}_X$ 的量子态基矢量 $|X_i\rangle$（或度规 $h_{\bar{i}j}$）相对于与之纠缠的另一个子空间 $\mathscr{H}_T$ 的态矢量 $|T\rangle$（量子时钟）的演化。

这个方程扮演类似标准的薛定谔方程所描写的量子态相对于绝对外部参数演化的角色，因此下面我们从这个方程出发做一些近似回到 Schrödinger 方程极限。接下来我们将 Ricci 曲率线性化为 $R_{\bar{i}j} \approx -\frac{1}{2}\Delta_x h_{\bar{i}j}$，其中 Δ_x 是对 x 的拉普拉斯算子，那么方程 (197) 可以变成

$$\frac{\partial^2 h_{\bar{i}j}}{\partial t^2} = \Delta_x h_{\bar{i}j} + h^{k\bar{l}} \frac{\partial h_{\bar{i}k}}{\partial t^a} \frac{\partial h_{j\bar{l}}}{\partial t_a} - K_a \frac{\partial h_{\bar{i}j}}{\partial t_a} \tag{198}$$

利用 $h_{\bar{i}j} = \langle X_i | X_j \rangle$，通过方程两边对应项相等可以将其变成关于右矢 $|X_i\rangle$ 的方程

$$\frac{\partial^2 |X_i\rangle}{\partial t^2} + K_a \frac{\partial |X_i\rangle}{\partial t_a} = \Delta_x |X_i\rangle + h^{k\bar{l}} \frac{\partial h_{\bar{i}k}}{\partial t^a} \frac{\partial |X_l\rangle}{\partial t_a} \tag{199}$$

如果现在右矢 $|X_i\rangle$ 相对 t_a 有一个快变的特征频率 ω^a，我们将 $|X_i\rangle$ 分成快变和慢变两部分，即 $|X_i\rangle = e^{-i\omega^a t_a}|e_i\rangle$，其中 $|e_i\rangle$ 是相比 ω^a 慢变的部分，即 $i\frac{\partial |e_i\rangle}{\partial t^a} \ll \omega_a |e_i\rangle$。于是我们就得到

$$\frac{\partial |X_i\rangle}{\partial t_a} = e^{-i\omega_a t^a} \left(\frac{\partial}{\partial t_a} - i\omega^a \right) |e_i\rangle \tag{200}$$

如果考虑标量外曲率 $K_a = \frac{1}{2} h^{\bar{i}j} \frac{\partial h_{\bar{i}j}}{\partial t^a}$ 变化非常缓慢

$$\frac{\partial}{\partial t^b} K_a \approx 0, \quad \frac{\partial}{\partial t^{b*}} K_a \approx 0 \tag{201}$$

由于 $K_a = -\frac{\partial}{\partial t^a} \ln \sqrt{\det h_{\bar{i}j}}$，这个标量外曲率的慢变近似，等价于子空间局部体积 $\sqrt{\det h_{\bar{i}j}}$ 近似是一个常数，这是回到标准量子力学的幺正性的必要条件。

现在方程的左边就变成

$$\frac{\partial^2 |X_i\rangle}{\partial t^2} + K_a \frac{\partial |X_i\rangle}{\partial t_a} \approx e^{-i\omega_a t} \left(\frac{\partial}{\partial t_a} - i\omega^a \right) \left(\frac{\partial}{\partial t^a} - i\omega_a + K_a \right) |e_i\rangle$$

其中 $\omega_a \omega^a = \omega^2$。当 $|e_i\rangle$ 随 t_a 缓慢变化，即 $\frac{\partial^2 |e_i\rangle}{\partial t^2} \ll -2i\omega_a \frac{\partial |e_i\rangle}{\partial t_a}$，我们就能忽略掉 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}|e_i\rangle$，方程的左边近似为

$$\frac{\partial^2 |X_i\rangle}{\partial t^2} + K_a \frac{\partial |X_i\rangle}{\partial t_a} \approx e^{-i\omega_a t^a} \left[-2i\omega^a \left(\frac{\partial}{\partial t^a} + \frac{1}{2} K_a \right) - \omega^2 \right] |e_i\rangle \equiv e^{-i\omega_a t^a} \left[-2i\omega^a \frac{D}{Dt^a} - \omega^2 \right] |e_i\rangle$$

另外从度规方程 (198) 也能导出左矢 $\langle X_i|$ 满足的独立的方程，因此左矢 $\langle X_i|$ 和右矢 $|X_i\rangle$ 是相互独立的态矢量，假设 $\langle X_i|$ 相比 $|X_i\rangle$ 是慢变的，即 $\frac{\partial}{\partial t_a}\langle X_i| \ll -i\omega_a \langle X_i|$，我们就得到

$$\frac{\partial h_{\bar{i}k}}{\partial t_a} = \frac{\partial}{\partial t_a} \langle X_i | X_k \rangle = \frac{\partial \langle X_i|}{\partial t_a} |X_k\rangle + \langle X_i| \frac{\partial |X_k\rangle}{\partial t_a} \approx \langle X_i| \frac{\partial |X_k\rangle}{\partial t_a} = e^{-i\omega_a t^a} \langle X_i| \left(\frac{\partial}{\partial t^a} - i\omega_a \right) |e_k\rangle$$

类似的，由于右矢慢变的部分有 $\frac{\partial}{\partial t_a}|e_k\rangle \ll -i\omega^a |e_k\rangle$，我们忽略 $\frac{\partial}{\partial t_a}|e_k\rangle$ 项，就有

$$\frac{\partial h_{\bar{i}k}}{\partial t_a} \approx (-i\omega^a)\, h_{\bar{i}k}$$

即度规 h_{ik} 的变化近似主要由右矢 $|X_k\rangle$ 的快变部分贡献，$\langle X_i|$ 是慢变的基，这不同于 $\langle X^i|$，$\langle X^i|$ 才是和 $|X_i\rangle$ 对偶的快变基，由于 $\langle X^i | X_j \rangle = \delta^i_j$，因此

$$\frac{\partial \langle X^i|}{\partial t_a} |X_j\rangle = -\langle X^i| \frac{\partial |X_j\rangle}{\partial t_a} \approx i\omega_a \delta^i_j \tag{202}$$

是快变的。也因为 $\langle X^i| = h^{ij} \langle X_j|$，现在 $\langle X_j|$ 是慢变基，所以 $\langle X^i|$ 的快变完全是由度规 h^{ij} 的快变 $\frac{\partial h^{ij}}{\partial t_a} \approx (i\omega^a)\, h^{ij}$ 带来的。

综上结果，现在方程 (199) 的右边近似给出

$$\Delta_x|X_i\rangle + h^{k\bar{l}}\frac{\partial h_{\bar{i}k}}{\partial t^a}\frac{\partial|X_l\rangle}{\partial t_a} \approx e^{-i\omega_a t^a}\Delta_x|e_i\rangle + h^{k\bar{l}}\left(-i\omega^a\right)h_{\bar{i}k}e^{-i\omega_a t^a}\left(-i\omega_a\right)|e_l\rangle = e^{-i\omega_a t^a}\left(\Delta_x - \omega^2\right)|e_i\rangle$$

于是方程 (199) 就变成

$$i\frac{D|e_i\rangle}{Dt^a} \approx -\frac{1}{2\omega^a}\Delta_x|e_i\rangle \tag{203}$$

其中

$$\frac{D}{Dt^a} \equiv \frac{\partial}{\partial t^a} + \frac{1}{2}K_a$$

是协变导数，标量外曲率 K_a 现在扮演了慢变基 $|e_i\rangle$ 在 $\mathscr{H}_T$ 上平行移动的联络的角色。如果将这个方程中的复坐标 t^a 和 x^i 看作是实坐标（数学上总能在量子态子空间的局部适当的选择坐标或基矢量 $|T_a\rangle$ 和 $|X_i\rangle$ 而将局部坐标 t^a 和 x^i 实数化）。在实坐标下，这个方程形式上就是一个 Schrödinger 方程了。

我们证明了 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程 (197) 或者它的线性化近似 (198) 和 (199) 描写了 $\mathscr{H}_X$ 子空间的度规 $h_{\bar{i}j}$ 或者基矢量 $|X_i\rangle$ 相对于与之纠缠的 $\mathscr{H}_T$ 的态矢量 $|T\rangle$ 的演化或者相对状态。因为我们看到，基矢量 $|X_i\rangle$ 的慢变部分 $|e_i\rangle$ 满足一个近似"自由"Schrödinger 演化方程的形式，其中快变的特征频率 $\hbar\omega^a$ 扮演了类似粒子质量 M_X 的角色，而 Schrödinger 方程的势能项则体现在协变导数的联络（标量外曲率 K_a）中。

通过这个联络，如果态矢量 $|X\rangle$ 在 $t \in \mathscr{H}_T$ 上沿着一条路径 c 移动，变化一个额外的不可积相位因子 e^{Θ} (一般 $\Theta \in \mathbb{C}$)，即

$$|X'\rangle = e^{\Theta}|X\rangle \tag{204}$$

e^{Θ} 也可以解释成量子态 $|X\rangle$ 和 $|X'\rangle$ 之间的有限（复）测地距离。其中

$$\Theta = \frac{1}{2}\int_c dt^a K_a \tag{205}$$

Θ 是在慢变基 $|e_i\rangle$ 的标准 Schrödinger 动力学（$i\frac{\partial|e_i\rangle}{\partial t^a} \approx -\frac{1}{2\omega^a}\Delta_x|e_i\rangle$）演化之外，还给出了 $|X_i\rangle$ 额外的相位变化。当 c 是一个闭合回路，即状态回到起点的时候，这个相位中动力学快变部分（ω_a 的部分）贡献的相位变化就消失了，剩下和闭合回路 c 的几何相关的相位变化。由于这个闭合回路是在 Hilbert 子空间 $\mathscr{H}_T$ 上的，而不是在参数空间上的闭合回路，从这个意义上，这个几何相位更接近在投影量子态空间上闭合回路带来的 Aharonov-Anandan 相位（一种 Berry 相位的推广）。相位 Θ 和势能项（联络或外曲率 K_a）的路径积累，因此一般是一个不可积的相位。对势能 K_a 做导数衍生出了某种"外力"

$$\mathscr{F}_{\bar{a}b} \equiv \frac{\partial K_b}{\partial t^{a*}} \tag{206}$$

$\mathscr{F}_{\bar{a}b}$ 反映了 $|X\rangle$ 以 $|T\rangle$ 为参照时，由于参考系的选择而产生的一种"惯性力"。在 (201) 近似下，回到近似的惯性系的情况。

另外我们也可以定义度规

$$g_{\bar{a}b} \equiv \left\langle \frac{\partial X^i}{\partial t^a} \middle| \frac{\partial X_i}{\partial t^b} \right\rangle \equiv G_{\bar{a}b} - \frac{i}{2}\Omega_{\bar{a}b}$$

$G_{\bar{a}b}$ 和 $\Omega_{\bar{a}b}$ 分别是度规的实部和虚部。作为量子态空间上的度规，它可以通过张量坐标变换的方法和 $\mathscr{H}_T$ 和 $\mathscr{H}_X$ 子空间的内蕴度量 $s_{\bar{a}b}$ 和 $h_{\bar{i}j}$ 相互变换，比如

$$g_{\bar{a}b} = \left\langle \frac{\partial X^i}{\partial t^a} \middle| \frac{\partial X^j}{\partial t^b} \right\rangle h_{\bar{i}j} = \left\langle \frac{\partial t_a}{\partial X_i} \middle| \frac{\partial t_b}{\partial X_j} \right\rangle h_{\bar{i}j} = \left\langle \frac{\partial t_a}{\partial t_c} \middle| \frac{\partial t_b}{\partial t_d} \right\rangle s_{\bar{c}d}$$

相比之前的 $s_{\bar{a}b}$ 和 $h_{\bar{i}j}$ 看作是子空间的内蕴度量，$g_{\bar{a}b}$ 也可以解释成 $\mathscr{H}_T$ 和 $\mathscr{H}_X$ 之间的相对度量 (relative metric)，是全空间度规 $q_{\bar{I}J}$ 在子空间上的拉回（pull back）。

容易证明这个度规 $g_{\bar{a}b}$ 其实就是我们通过联络定义的“惯性力”(206)

$$\mathscr{F}_{\bar{a}b} \doteq g_{\bar{a}b}$$

从 (204) 可以看到，实部的黎曼度规 $G_{\bar{a}b} = G_{b\bar{a}} = \mathrm{Re}\,(g_{\bar{a}b})$ 可以给出两个无穷小间隔的态矢量 $|X(t+dt)\rangle$ 和 $|X(t)\rangle$ 之间的 (实) 距离。由于态矢量 $|X\rangle$ 作为非平凡纤维丛上局部的纤维只能在局部 t 处归一化，随着 t 的变化，态矢量 $|X\rangle$ 的长度和相位都会相对于 $|T\rangle$ 发生变化。因为

$$\langle X^i(t+dt)|X_i(t)\rangle = \langle X^i(t)|X_i(t)\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial X^i}{\partial t^a}\middle| \frac{\partial X_i}{\partial t^b}\right\rangle dt^{a*}dt^b + ... = e^{d\Theta} = 1 + d\Theta + ...$$

所以实部 $G_{\bar{a}b}$ 对应于

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(d\Theta) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\langle \frac{\partial X^i}{\partial t^a}\middle| \frac{\partial X_i}{\partial t^b}\right\rangle dt^{a*}dt^b = \frac{1}{2}G_{\bar{a}b}dt^{a*}dt^b \\ &= \left\|\langle X^i(t)|X_i(t)\rangle - \langle X^i(t+dt)|X_i(t)\rangle\right\| = \left\|1 - \langle X^i(t+dt)|X_i(t)\rangle\right\| \in [0,1]\end{aligned}$$

上式和 (205) 比较，也能看到 $\mathrm{Re}\,(d\Theta) = \frac{1}{2}G_{\bar{a}b}dt^{a*}dt^b = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}K_b dt^b\right)$，所以度规的实部就是惯性力的实部

$$G_{\bar{a}b} = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial K_b}{\partial t^{a*}}\right) = \mathrm{Re}\,(\mathscr{F}_{\bar{a}b})$$

度规的实部 $G_{\bar{a}b}$ 和虚部 $F_{\bar{a}b}$ 通过态空间的复结构算子 J（满足本征值方程为 $J\frac{\partial}{\partial t^a} = i\frac{\partial}{\partial t^a}$ 和 $J\frac{\partial}{\partial t^{a*}} = -i\frac{\partial}{\partial t^{a*}}$）联系在一起，

$$JG_{\bar{a}b} = -\Omega_{\bar{a}b}, \quad J\Omega_{\bar{a}b} = G_{\bar{a}b}$$

因此虚部有

$$\Omega_{\bar{a}b} = -2\mathrm{Im}\left(\frac{\partial K_b}{\partial t^{a*}}\right) = -2\mathrm{Im}\,(\mathscr{F}_{\bar{a}b})$$

我们看到，当相位 Θ 是可积的时候，存在局部定义的 Berry 曲率 $F_{\bar{a}b}$，定义为将联络 K_a 做一次外微分 $F = dK$ (exterior derivative)

$$F_{\bar{a}b} = \frac{\partial K_b}{\partial t^{a*}} - \frac{\partial K_a}{\partial t^{b*}} = \mathscr{F}_{\bar{a}b} - \mathscr{F}_{a\bar{b}} = \mathscr{F}_{\bar{a}b} - \mathscr{F}^*_{\bar{a}b} \tag{207}$$

由于度规 $g_{\bar{a}b}$ 的厄米性 $g_{\bar{a}b} = g^*_{\bar{a}b}$，$\Omega_{\bar{a}b} = g_{\bar{a}b} - g^*_{\bar{a}b}$，所以将其和 (207) 相比，我们就看到度规的虚部其实就是 Berry 曲率

$$\Omega_{\bar{a}b} = F_{\bar{a}b}$$

我们下面讨论不可积相位 Θ 的实部和虚部的一些物理意义。我们看到，$\mathrm{Re}\,(d\Theta) = \|1 - \langle X^i(t+dt)|X_i(t)\rangle\|$ 还可以解释成态矢量 $|X\rangle$ 长度（即 $\||X\rangle\|$）的无穷小伸缩，使得 $|X\rangle$ 随 $|T\rangle$ 的演化一般来说不再是严格幺正的。因此之前只有在假定标量外曲率缓慢变化 (201) 的前提下我们才能得到幺正变化的 Schrödinger 方程。这也是纠缠态子系统是相对演化，其中作为参考系的 T 子系统的量子叠加（量子二阶矩展宽）带来的必然后果。

这种幺正性的破坏也可以解释成一种额外的二阶涨落或者额外展宽的效应。考虑到和 t 的二阶矩涨落对应的有效的能量 E 的二阶矩展宽 $\langle\delta E^2\rangle = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2$，带来 $\langle X^i(t+dt)|X_i(t)\rangle = 1 - \frac{1}{2}\langle\delta E^2\rangle dt^2$，因此度规 $g_{\bar{a}b}$ 直接由 t 的二阶矩量子涨落或者有效能量的二阶矩涨落决定的，即 $g_{\bar{a}b}dt^{a*}dt^b \sim \langle\delta E^2\rangle dt^2$，这就是 Anandan-Aharonov 定理。因此这个“惯性力”$\mathscr{F}_{\bar{a}b} \doteq g_{\bar{a}b} \sim \langle\delta E^2\rangle$ 也可以看作是由能量的量子涨落或者是时钟参照系的量子涨落带来的。纠缠系统子空间的度规由 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程的解来贡献，也可视作由量子二阶矩涨落来贡献。我们还看到时钟的二阶涨落导致的幺正性破坏产生了额外的“惯性力”的效应，反过来，惯性力

的效应似乎总是和改变态矢量的模长或者量子幺正性破坏联系的。这种量子时钟参考系统的展宽带来的非幺正性将在后文中被推广到更一般的量子时空参考系，是导致一般量子时空参考系坐标变换反常、宇宙常数和引力（gravity）的根本原因（见 VI D）。

类似的，因为不可积相位 Θ 或者度规的虚部和 Berry 曲率联系，

$$d\theta = \mathrm{Im}\left(d\Theta\right) = \frac{1}{4}F_{\bar{a}b}dt^{a*} \wedge dt^{b}$$

对应于 $|X\rangle$ 的相位的无穷小变化。积分

$$\theta[c] = \mathrm{Im}\left(\Theta\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\oint_{c} dt^{a}K_{a} = \frac{1}{4}\iint_{s} F_{\bar{a}b}dt^{a*} \wedge dt^{b}$$

就描写了态矢量 $|X\rangle$ 沿着 $\mathscr{H}_T$ 上的闭合回路 $c = \partial s$ 走一圈的几何相位变化。如果说实部给出了一种态矢量长度变化相关的“伸缩力 (contracting force)”，那么虚部就给出了相位变化相关的“规范作用力 (gauge force)”（我们知道规范场只改变态矢量的相位而不改变态矢量的模长）。“伸缩力”改变态矢量长度而“规范作用力”改变态矢量相位。在这种意义上，量子态在一般的量子坐标变换下，不仅实部自动引入了“伸缩力”，虚部也引入了“规范作用力”。虚部和规范作用力的深刻关系也是十分有趣的，这可以在其它讨论通常量子理论的几何相位的书中找到，在本文中，和虚部伴随出现的实部引入的“伸缩力”（后面更一般的将表现为引力 gravity）是我们主要的兴趣所在。一般来说，只要在量子态相对量子时钟的变换中引入一般的复数联络（既有实部也有虚部），量子态产生的不可积因子 e^{Θ}，那么就不可避免的通过这种坐标变换同时引入了引力和规范作用力。这是否达成了某种引力和规范作用力的统一的课题是一个更深奥的问题，超出了本文讨论的范围。

前面看到，实部 $G_{\bar{a}b}$ 描写了 $\mathscr{H}_X$ 上的矢量的长度相对于 $\mathscr{H}_T$ 的矢量的二阶涨落，反映了态矢量模长改变的幺正性破坏程度。如果注意到标量外曲率其实描写了 $\mathscr{H}_X$ 的局部体积元相对于 $|T\rangle$ 矢量的一阶变化

$$K_b = -\frac{\partial}{\partial t^b}\ln\sqrt{\det h_{\bar{i}j}}$$

我们也能很容易看到 $g_{\bar{a}b}$ 度规的实部

$$G_{\bar{a}b} = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial K_b}{\partial t^{a*}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{-\partial^2}{\partial t^{a*}\partial t^b}\ln\sqrt{\det h_{\bar{i}j}}\right)$$

自然就描写了 $\mathscr{H}_X$ 局部体积元 (的对数) 大小随 $|T\rangle$ 的二阶变化，$\mathscr{H}_X$ 局部体积的变化正是由于二阶涨落导致其量子态的长度二次型修正造成的。在外曲率的慢变近似 (201) 下，局部体积近似守恒，幺正性近似成立。而虚部 $-\frac{1}{2}F_{\bar{a}b}$ 作为 Berry 曲率描写 $\mathscr{H}_X$ 上的态矢量相对于 $\mathscr{H}_T$ 的态矢量的二阶相位变化。

我们看到 $\mathscr{H}_X$ 的局部体积元的对数 $-\ln\sqrt{\det h_{\bar{i}j}}$ 形式上类似扮演了 Kähler 势（Kähler potential）的角色，即复度规可以用一个单一的体积形式来表示出来 $g_{\bar{a}b} = -\partial_{\bar{a}}\partial_b\ln\sqrt{\det h_{\bar{i}j}}$。如果相位 $\Theta = \frac{1}{2}\int_c dt^a K_a$ 是可积的，即局部 Berry 曲率 $F = F_{\bar{a}b}dt^{a*} \wedge dt^b$ 是闭 (closed) 的，$dF = d^2K = 0$，由于这个局部 Berry 曲率就是局部度规的虚部 $\Omega_{\bar{a}b}$，因此这个带有厄米复度量的量子态空间就是一个 Kähler 空间，$\frac{i}{2}F_{\bar{a}b}dt^{a*} \wedge dt^b$ 就是 Kähler 形式（Kähler form），反应了 Kähler 空间的辛结构（symplectic structure）。Kähler 空间就是一种同时带有黎曼结构和辛结构并和其复结构相容的一种空间。当量子态空间是一个 Kähler 空间的时候，由于 Kähler 度规具有更强的对称性，可以通过单一的 Kähler 势表示，因此多个分量的 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程将退化成单一的复 Monge-Ampère 方程，求解 Einstein 方程的问题将被简化。当存在一个常数的态空间体积形式 $\sqrt{\det h_{\bar{i}j}}$，即常数的 Kähler 势 $-\ln\sqrt{\det h_{\bar{i}j}}$，这退化到标准幺正量子力学的情形，因此标准量子力学的态空间是 Kähler 的。特别的，当其子空间曲率和度规成正比 $R_{\bar{a}b} = (N+1)g_{\bar{a}b}$，量子态空间同态于最大对称的球面 S^{2N+1}，这个 Kähler 度规 $g_{\bar{a}b}$ 称为 Fubini-Study 度规。而我们所关心的子空间度规 $h_{\bar{i}j}$ 一般并不具有常数曲率，也不具有常数局部体积形式，因此这里量子态的子空间度规一般并不是 Fubini-Study 的。但一般情况下，我们的相位 Θ

并不是可积的（与路径和历史有关），不再能局部的定义 Berry 曲率，这时量子态子空间就不严格是 Kähler 的，只能看作是一种近 Kähler 流形。

由于现在被测量量子系统和量子仪器处于完全对等的地位，因此我们类似的也可以得到量子仪器的基 $|T_a\rangle$ 或者度规 $s_{\bar{a}b} = \langle T_a|T_b\rangle$ 相对于测量系统的量子态 $|X\rangle = \sum_i x^i|X_i\rangle$ 的演化，也满足一个类似的 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程，对应的将方程 (197) 中的内曲率 $R_{\bar{a}b}$ 通过度规 $s_{\bar{a}b}$ 来给出，而外曲率由 $K_{\bar{a}b} = -\frac{1}{2}\frac{\partial s_{\bar{a}b}}{\partial x^i}|X^i\rangle$ 给出。

在测量之前的仪器校准，就是制备了相互纠缠的被测量子系统 $|X_i\rangle \in \mathscr{H}_X$ 和量子仪器 $|T_a\rangle \in \mathscr{H}_T$，他们形成的纠缠态可以写成 (195) $|X,T\rangle \in \mathscr{H}_X \otimes \mathscr{H}_T$。在仪器校准之后的测量过程中，被测量子系统和量子仪器之间不再相互作用，纠缠态系数 C_i 在仪器校准之后也不再相对于任何（假想的）外部参数改变，仅仅只是被测量子系统和量子仪器之间相对的变化，其相对演化由 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程给出的子空间度规或者基矢量来描写。当量子仪器处于某个量子态 $|T\rangle$ 的时候，方程的解告诉我们与其基矢量 $|T_i\rangle$ 相纠缠的被测系统子空间的度规 $h_{\bar{i}j}$ 或者基矢量 $|X_i\rangle$；或者反过来，当被测系统处于某个量子本征态 $|X\rangle$ 的时候，方程给出与其基矢量 $|X_i\rangle$ 相纠缠的另一个子系统的度规 $s_{\bar{a}b}$ 或基矢量 $|T_a\rangle$。于是借助度规或者基矢量，我们可以将纠缠态 (195) $|X,T\rangle$ 矢量做相应的条件投影，比如

$$\langle T|X,T\rangle = \sum_i C_i\langle T|T_i\rangle|X_i\rangle = \sum_i C_i t^{i*}|X_i\rangle = \sum_i \frac{C_i}{t_i^*}|X_i\rangle, \quad \left(C_i t^{i*}\text{的}i\text{不缩并}\right)$$

其中用了 $|X,T\rangle = \sum_i C_i|X_i\rangle|T_i\rangle$ 和条件投影态 $|T\rangle = \sum_a t^a|T_a\rangle$，得到的 $|X_i\rangle$ 前面的系数 $\frac{C_i}{t_i^*}$ 就是当量子仪器处于某个条件量子态 $|T\rangle$ 时被测量子系统处于 $|X_i\rangle$ 的相对振幅。由于 C_i 由仪器校准的初始条件给定，是纠缠态制备之后不再改变了，Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程给出基矢量 $|T_a\rangle$ 随 $|X_i\rangle$ 演化，即方程的解给出展开系数 t_i^* 和 $|X_i\rangle$ 之间的对应关系，因此给出纠缠态投影得到的相对振幅 $\frac{C_i}{t_i^*}$ 和 $|X_i\rangle$ 之间的对应。因此在这个理论中，并没有标准教科书量子力学中的态矢量演化的概念（即态矢量随着外部参数的幺正旋转），在这里纠缠态矢量 $|X,T\rangle$ 是不演化的，只是在 Hilbert 子空间上的基矢量 $|T_a\rangle$ 在相对于其它子空间 $|X_i\rangle$ 在演化，导致投影 $\langle T|X,T\rangle$ 看起来在演化。也正因为现在只是基矢量在做相对演化，所以这种演化其实是普适的，我们注意到 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程不依赖系统的质量也不显含普朗克常数（如同 Berry 相位中不显含普朗克常数一样），质量的相关性和普朗克常数是从 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程通过 $|X_i\rangle$ 基矢量的快变和慢变分离近似下得到慢变 $|e_i\rangle$ 基矢量的 Schrödinger 方程时出现的。从这个意义上来说，Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程描写的不同子空间上的基矢量之间的相对变化都是纯几何的 Berry 类型的相位变化，而不再像标准量子力学那样将相对于外部参数的相位变化分成动力学的部分和几何的 Berry 相位部分。

或者用子空间的度规对纠缠态的密度矩阵 $\rho_{X,T} = |X,T\rangle\langle X,T|$ 对 $\mathscr{H}_T$ 部分做偏迹（由于纠缠态 $|X,T\rangle$ 不是 Schmidt 分解的形式，偏迹一般需要用子空间度规来收缩，而不是简单将子空间的对角元求和），即用 $\mathscr{H}_T$ 空间的度规收缩密度矩阵，得到

$$\mathrm{Tr}_T\left(\rho_{X,T}\right) = \langle T|X,T\rangle\langle X,T|T\rangle = \sum_{i,j} s_{\bar{i}j}C_iC_j^*|X_i\rangle\langle X_j| = \sum_i \frac{C_iC_i^*}{t_i^*t_i}|X_i\rangle\langle X_i| = \sum_i \left|\frac{C_i}{t_i}\right|^2|X_i\rangle\langle X_i|$$

求偏迹之后的矩阵的对角元，直接就是当量子仪器处于量子态 $|T\rangle$ 时被测量子系统处于 $|X_i\rangle$ 的相对概率（或条件概率）

$$\mathrm{P}\left(X_i|T\right) = \left|\frac{C_i}{t_i}\right|^2$$

借助这个相对概率或者密度矩阵，就可以计算某个通过 X 表示的厄米力学量算子 $\mathbf{O}(X)$ 在测量仪器处于量子态 $|T\rangle$ 是测量到的量子期待值现在就可以表示为

$$\mathrm{Tr}_T\left[\rho_{X,T}\mathbf{O}(X)\right] = \sum_i \left|\frac{C_i}{t_i}\right|^2\langle X_i|\mathbf{O}|X_i\rangle$$

类似的也可以反过来得到，当被测量子系统处于量子态 $|X\rangle$ 时量子仪器处于 $|T_i\rangle$ 的相对概率 $\mathrm{P}\left(T_i|X\right)=\left|\frac{C_i}{x_i}\right|^2$，相应的，力学量算子 $\mathbf{O}(T)$ 在这个相对概率下的量子期待值就是 $\mathrm{Tr}_X\left[\rho_{X,T}\mathbf{O}(T)\right]=\sum_i\left|\frac{C_i}{x_i}\right|^2\langle T_i|\mathbf{O}|T_i\rangle$。

我们看到相对概率在对校准制备的纠缠态 $|X,T\rangle$ 对子系统求偏迹的过程中自然的出现了。这不同于标准教科书中 Schmidt 分解的纠缠态的偏迹，首先 Schmidt 分解的纠缠态的对两个不同子系统求偏迹得到的两个约化密度矩阵有相同的非零本征谱，而我们这里，对不同子系统求偏迹得到的是不同的相对概率。其次 Schmidt 分解的纠缠态的子系统基矢量是正交归一的，而我们校准制备的纠缠态的子系统基矢量并不是正交归一的，而是给出非平凡的子空间度规。这也导致了我们的子系统的度规是满足一般的 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程作为局部基矢量的相对演化方程，而不是像 Schmidt 纠缠态那样和常曲率的 Fubini-Study 度规（满足复射影空间的常曲率 Einstein 方程）联系。

我们总结一下：（1）被测量量子态 $|X\rangle$ 和时钟仪器状态 $|T\rangle$ 在校准中制备的纠缠态不随外部参数演化，但被测量量子态 $|X\rangle$ 相对于时钟状态 $|T\rangle$ 的内蕴量子体系的相对演化，可以通过嵌入到全量子态空间的子空间的 Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程来给出。Ricci 平坦的 Kähler-Einstein 方程是一个一般协变的方程，不再参考任何外部绝对参数的描写，而是只通过内部相对的描写。从这种意义上，这个框架实现了某种描写被测量量子系统和量子仪器的量子理论的几何化。这个方程有一个 Schrödinger 方程的非相对论近似。（2）从这个框架看，量子态的演化现在就是子空间的基矢量相对于另一个子空间的基矢量的演化，虽然纠缠态（相对外部参数）不演化，但纠缠态在子空间基矢量上的投影分量相对于时钟子空间在演化。从而在这个图像中，没有态矢量相对于不变的基矢量演化的概念，而是纠缠态矢量不变，基矢量在改变。从而现在不再区分量子动力学相位（基矢量不变态矢量改变）和几何相位（基矢量相对外部参数的改变），本质上动力学相位现在也是从基矢量改变的几何相位带来的。（3）被测量量子态 $|X\rangle$ 相对于时钟状态 $|T\rangle$ 的纠缠态在投影到子空间之后，有相对于测量仪器状态出现概率的相对概率解释，而不再有相对于外部参数的绝对概率解释了。（4）对于这个被测量量子态 $|X\rangle$ 相对于时钟状态 $|T\rangle$ 的内蕴量子体系，我们看到和一般时钟参考态的选择相联系的惯性力自然的出现了，这个惯性力 $\mathscr{F}_{\bar{a}b}$ 和被测量量子态 $|X\rangle$ 和时钟仪器状态 $|T\rangle$ 之间的相对度规 $g_{\bar{a}b}$ 联系。这个由于参照系的一般选择而衍生出来的“惯性力”及其量子效应是本文主要关心的问题。这个“惯性力”的实部带来纠缠子系统的二阶展宽以及量子态幺正性破坏（子系统量子态空间体积变化和历史依赖的信息丢失），虚部带来几何相位。如同虚部带来的几何相位是历史依赖的，实部的幺正性破坏也是历史或路径依赖（不可积）的，这种量子非幺正效应的历史依赖性在弯曲时空的量子场论中我们已经看到了（比如量子纯态从无限远逐渐靠近黑洞视界，然后再回到无限远的闭合回路过程的一些信息丢失了）。贯穿全文我们都会看到非惯性系带来的量子幺正性破坏效应和反常将是非常普遍和一般性的结论。但这个简单系统中这个初步衍生出来的“惯性力”$\mathscr{F}_{\bar{a}b}$ 还没有显示出引力的特征，只是一个一般的惯性力，原因是我们目前这个系统还是简单的（一个参考自由度的）量子时钟参考系统，只有将其推广到（多个参考自由度）量子时空参考系统，这种类型的惯性外力导致的幺正性破坏和反常带来的引力（gravity）的特征和形式将显现出来（见 VI D）。（5）在这个基于少数有限自由度的量子力学态演化的框架中，已经涉及到复杂的 Kähler-Einstein 方程（作为相对演化方程）。如果要涉及到无限自由度的场对象（一般的量子参考系），这种方法将变得异常的复杂和难以处理，因此在本文中对量子时空参考系的处理中我们没有采用这个附录基于量子态的相对演化的微分方程的框架，而是基于 (III B) 中的作用量和泛函积分的框架。这个附录基于量子态演化微分方程的框架更适合在概念层面展示其和标准量子力学 Schrödinger 方程及其概率解释上的关系，作用量和泛函积分的量子化框架将是更易于实际数学处理的框架。

---

[1] M. J. Luo. The cosmological constant problem and re-interpretation of time. *Nuclear Physics*, 884(1):344–356, 2014.

[2] M. J. Luo. Dark energy from quantum uncertainty of distant clock. *Journal of High Energy Physics*, 06(063):1–11, 2015.

[3] M. J. Luo. The cosmological constant problem and quantum spacetime reference frame. *Int. J. Mod. Phys.*, D27(08):1850081, 2018.

[4] M. J. Luo. Ricci Flow Approach to The Cosmological Constant Problem. *Found. Phys.*, 51(1):2, 2021.

[5] M. J. Luo. Trace anomaly, Perelman's functionals and the cosmological constant. *Class. Quant. Grav.*, 38(15):155018, 2021.

[6] M. J. Luo. Local conformal instability and local non-collapsing in the Ricci flow of quantum spacetime. *Annals Phys.*, 441:168861, 2022.

[7] M. J. Luo. A Statistical Fields Theory underlying the Thermodynamics of Ricci Flow and Gravity. *Int. J. Mod. Phys. D*, 32(5):2350022, 2 2023.

[8] M. J. Luo. Quantum Modified Gravity at Low Energy in the Ricci Flow of Quantum Spacetime. *Int. J. Theor. Phys.*, 62(4):91, 2023.

[9] M. J. Luo. The Ricci flow and the early universe. *Annals of Physics*, 458:169452, November 2023.

[10] M. J. Luo. Local Short-Time Acceleration induced Spectral Line Broadening and Possible Implications in Cosmology. *Annals of Physics*, 473:169899, November 2024.

[11] M. J. Luo. Second-order moment quantum fluctuations and quantum equivalence principle. *Phys. Lett. A*, 535:130273, 2025.

记号表

a: Friedman-Robertson-Walker (FRW) 度规标度因子
a: 加速度，如牛顿加速度 a_N，膨胀加速度 a_E，旋转加速度 a_D
a_0: MOdified Newtonian Dynamics(MOND) 的临界加速度常数 $a_0 \approx 1.2 \times 10^{-10} m/s^2$
d: 实验室标准时空维数、非线性 σ-模型底时空维数 $d = 4 - \epsilon$
d_L: 光度距离
D: (赝) 黎曼时空维数、非线性 σ-模型靶时空维数 $D \equiv 4$
e: 自然底数
e^a_μ: 标架 vierbein
$\mathcal{E}$: 内能
f: u 密度的负自然对数 $f = -\log u$
F: 自由能
$F_{\bar{a}b}$: Berry 曲率
$\mathcal{F}$: Perelman 的 F 泛函
$\tilde{\mathcal{F}}$: 相对 F 泛函 $\tilde{\mathcal{F}} \equiv \mathcal{F} - \mathcal{F}_0$
$\mathscr{F}_{\bar{a}b}$: 惯性力
g: 度规的行列式 $g = \det g_{\mu\nu}$
$g_{\mu\nu}$: 时空度规张量
$g_{\bar{a}b}$: 量子态空间的复度规
G: 牛顿常数
h_{ij}: 3-空间张量涨落
$h_{\bar{i}j}$: 量子态子空间的复度规
H: 哈密顿量
H_0: 哈勃常数
i: 虚数单位
i, j: 空间指标 1,2,3
k: 标架场紫外截断能标
K, K_a: 子空间的外曲率
$K(X, Y, t)$: 跃迁振幅，积分热核
$\tilde{K}(X|Y)$: 相对振幅
$\mathscr{K}(X, Y)$: 粒子的传播子
l: Perelman 约化距离
$\mathcal{L}$: 拉氏量密度
M_b: 星系重子质量
M^D: D 维的时空构型
n: 空间方向矢量
N: Shannon 熵
$\tilde{N}$: 相对 Shannon 熵
$\mathcal{N}$: 暴涨 e-folding 数
$\mathbb{N}(\zeta)$: 低于 ζ 的本征值的个数，$\mathbb{N}(\zeta) \equiv \mathbb{N}(i : \zeta_i \leq \zeta) = \sum_{\zeta_i < \zeta} 1$

$\tilde{(\cdot)}$: 任何量上面的“~”代表“相对”的量
p: 积分动量
$\mathrm{P}(A|B)$: 条件概率或相对概率
$P_{\delta\varphi}, P_h$: 标量和张量涨落功率谱幅度
q_0: 晚期宇宙膨胀减速因子 $q_0 \approx -0.64$
r: 半径
$\mathtt{r}$: 张量-标量谱幅度比
R: 标量曲率
$R_{\mu\nu}$: Ricci 曲率
$\mathcal{R}$: Ricci 曲率 $R_{\mu\nu}$ 中一阶导数部分给出的非标量，即 $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$, $\quad \mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\gamma} - \Gamma^{\gamma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\gamma}\right)$
s: 原时 proper time
S: 作用量
$\mathcal{S}$: 热力学熵
t: Ricci 流正向流参数 $t = -\frac{1}{64\pi^2\lambda}k^2$
t_*: Ricci 流出现局部奇异性的尺度，无奇异流则 $t_* = 0$
T: 物理时钟时间
$T_{\mu\nu}$: 能量动量张量
$\mathcal{T}$: 温度
u: 时空 u 概率密度，标架场概率密度，局部体积比（无量纲）
$\tilde{u}$: 相对密度，条件概率密度 $\tilde{u}(X|Y)$ （无量纲）
v: 共轭热方程的子解 subsolution
$\mathbf{v}$: 速度，如旋转速度 $\mathbf{v}_{旋转}$，膨胀速度 $\mathbf{v}_{膨胀}$
v_f: 漩涡星系旋转速度平台的速度
V: 势能
$\tilde{V}$: Perelman 的约化体积
w: 物态方程
$\mathcal{W}$: Perelman 的 W 熵泛函
x: 实验室标准时空、非线性 σ-模型底时空坐标
X: 量子时空标架场、(赝) 黎曼时空坐标、非线性 σ-模型靶时空坐标
z: 宇宙学红移
Z: 归一化因子、配分函数
$\mathcal{Z}$: 重整化函数
β: 虚时周期、温度的倒数 $1/\mathcal{T}$
γ: 暴涨结束时间和暴涨典型时间的比，$X^0_{end}/X^0_\star$
$\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}$: Levi-Civita 联络
Δ: 时空的拉普拉斯算子
ϵ: 小量，比如非线性 σ-模型底时空对四维的小偏离，紫外短距离截断等
η: 共形时间
$\eta_{\mu\nu}$: 平坦时空度规
θ, Θ: 相位角，Berry 相位
$\exp\Theta$: 中心密度 (central density)

λ: 非线性 σ-模型系数、宇宙临界密度 $\lambda = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx (10^{-3}\mathrm{eV})^4$

Λ: 宇宙学常数

$\nu(M_{UV}^D)$: 时空流形 M^D 的 Ricci 流紫外抵消项

μ, ν: 时空指标 0,1,2,3

ρ_M: 重子物质密度

$\rho_{X,T}$: 纠缠态 $|X, T\rangle$ 的密度矩阵

$\sigma_{\mu\nu}$: 协方差矩阵、高斯展宽

τ: 逆流参数 $\tau = t_* - t$，无奇异流 $(t_* = 0)$ 时，$\tau = \frac{1}{64\pi^2\lambda}k^2$

$\varUpsilon$: 重整化因子 $\varUpsilon \equiv 1 - \frac{1}{2}R(\tau_0)\,(\tau_0 - \tau) \approx (0.13 \sim 0.18)$

Φ: 静态引力势

Φ_N: 牛顿引力势

ϕ: 物质标量场

(r, θ, ϕ), (r, Ω): 球坐标

Ψ_0: u 密度对应的波函数 $\sqrt{u}$，$-4\Delta + R$ 算子的最低本征函数

ψ_i: $-\Delta + R$ 算子的本征函数

Ω: 共形因子

Ω_Λ: 暗能量占临界密度的比值